Lycée Condorcet
PCSI

Octobre 2024

Nombres complexes

1 Forme algébrique, forme exponentielle

Exercice 1. B
Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$. Déterminer la forme algébrique de :

a) $z_1 = (2+i)e^{i3\theta}$,
b) $z_2 = (1-2i)e^{-i\theta}$,
c) $z_3 = \dfrac{e^{2i\theta}}{1-i}$,
d) $z_4 = (\sqrt{3}-i)^{2015}$
e) $z_5 = (1+e^{i\theta})^n$, où $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
f) $z_6 = \dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$, où $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 2. B
Trouver les modules et arguments des complexes suivants :

a) $z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$,
b) $z_2 = \left(\frac{\mathbf{1+i\sqrt{3}}}{\mathbf{1-i}}\right)^{20}$,
c) $z_3 = -2i(2+2i)$,
d) $z_4 = 1+i\tan\theta$ où $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$
e)* $z_5 = 1+e^{i\theta}$, où $\theta \in]-\pi,\pi[$,
f)* $z_6 = \dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$ où $\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice 3. B
Soit $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Déterminer les parties réelles et imaginaires de z_3, puis les modules et arguments de z_3. En déduire une expression explicite de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.En déduire $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 4.
Soient a et b deux complexes de module 1 tels que $a \neq -b$. Monter que $\dfrac{1+ab}{a+b} \in \mathbb{R}$.
Indications :
Utilisez la proposition 4.5 du cours et la propriété des complexes de module 1

$$\forall z \in \mathbb{U}, \overline{z} = \frac{1}{z}$$

Exercice 5.
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Montrer :

$$|z+z'| = |z|+|z'| \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}_+, z' = \lambda z$$

Indications :
On peut procéder par équivalences.
Reprendre la démonstration de l'inégalité triangulaire. Dans la démonstration quand à t'on utiliser une inégalité ? On veut ici une égalité. Á quoi cette égalité est équivalente ?

Exercice 6. B
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de n, le nombre complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est il un réel positif ?
Indications :
Passez en forme exponentielle (la forme des complexes au numérateur et au dénominateur doit vous y pousser et le fait que l'on ait une puissance).
Quels arguments ont les réels ?

2 Trigonométrie, linéarisation, sommes

Exercice 7. B
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ et en déduire la valeur de $\sin(5\theta)$.

Exercice 8. B
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ et $\cos x \sin^4 x$.

Exercice 9. B
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{n} \sin(ka), \qquad B = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb), \qquad C = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb), \qquad D = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$$

Correction :
• **Si** $a \equiv 0 \quad [2\pi]$
Alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\sin(ka) = 0$ et

$$\boxed{A = 0}$$

• **Supposons que a ne soit pas congrue à 0 modulo 2π.**
On a par définition de la notation exponentielle, comme la partie imaginaire est linéaire et d'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{iak}) \\ &= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{ia})^k\right) \end{aligned}$$

Calculons la dernière somme. C'est une somme géométrique et par hypothèse $e^{ia} \neq 1$. On a ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{ia})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)a}}{1 - e^{ia}}$$

En utilisant la méthode de l'angle moitié au numérateur et dénominateur on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{ia})^k = \frac{e^{i\frac{(n+1)a}{2}}}{e^{i\frac{a}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{(n+1)a}{2}} - e^{i\frac{(n+1)a}{2}}}{e^{-i\frac{a}{2}} - e^{i\frac{a}{2}}}$$

Ainsi d'après les formules d'Euler et les propriétés de morphismes de la notation exponentielle. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{ia})^k = e^{i\frac{n+a}{2}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$$

Ainsi, en prenant la partie imaginaire de ce complexe on obtient :

$$\boxed{A = \frac{\sin\left(\frac{n+a}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}}$$

Notez que, sous les hypothèses, le dénominateur est bien non nul.

3 Équation polynômiale dans $\mathbb{C}$

Exercice 10. B
En calculant de deux façons les racines carrées de $1+i$ déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 11. B
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$.

a) $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$,
b) $(2+i)z^2 + (5-i)z + 2 - 2i = 0$,
c)* $z^{2n} - 2z^n\cos(n\theta) + 1 = 0$,
d) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$
e)* $z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0$
f)* $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$.

Exercice 12.
Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

a) $\left\{\begin{array}{c} x+y=2 \\ xy=2 \end{array}\right.$,
b) $\left\{\begin{array}{c} x+y=1+i \\ xy=13i \end{array}\right.$,
c) $\left\{\begin{array}{c} x+y=3i \\ xy=-1-3i \end{array}\right.$
d)* $\left\{\begin{array}{c} x+y=a \\ xy=a^2 \end{array}\right.$

Exercice 13.
Soit l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $2z^3 - (3+4i)z^2 - (2-7i)z + 2i = 0$

1. Montrer qu'elle a une racine réelle z_0.
2. En déduire toutes les solutions de l'équation.

4 Racines n-ième

Exercice 14. B
On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Simplifier :

$$A = (j+1)^5, \qquad B = \frac{1}{(j+1)^4}, \qquad C = \frac{j-1}{j+1}$$

Exercice 15. B Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n + 1 = 0$.
2. $z^5 = -i$
3. $z^5 = \dfrac{1+i}{1-i}$.

Exercice 16. B

1. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1+i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 17. B
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(1+z)^n = (1-z)^n$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 18. On note $(*)$ l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de $(*)$. On pose $x = z + \frac{1}{z}$. Montrer que : $x^2 + x - 1 = 0$
2. Montrer que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est solution de $(*)$.
3. En déduire une expression explicite de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 19.
On note $\xi = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $S = \xi + \xi^2 + \xi^4$ et $T = \xi^3 + \xi^5 + \xi^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués.
2. Montrer que $\text{Im}(S) > 0$.
3. Calculer $S + T$ et ST puis en déduire S et T.

Exercice 20. (*)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$.
2. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1+w^k)^n$.
3. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1+k)\omega^k$.

5 Exponentielle complexe

Exercice 21. B Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équation suivante d'inconnue z :

a) $e^z = 3$	c) $e^z = 3i$
b) $e^z = i$	d) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

6 Nombre complexe et géométrie plane

Exercice 22. B
Déterminer l'ensemble des point $M(z)$ tels que :

a) $|z+i| = |z-1|$

b) $z, \frac{1}{z}$ et $1+z$ aient le même module

c) $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$

d) $z+\overline{z} = z\overline{z}$

Exercice 23. B
À quelle condition nécessaire et suffisante sur z :

1. les point d'affixes 1, z et z^2 sont ils alignés ?
2. les vecteurs d'affixes z et $\overline{z}$ sont ils orthogonaux ?
3. les points d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ sont ils situés sur un même cercle de centre O ?
4. (*) les vecteurs d'affixes z et z^5 sont-ils orthogonaux ?
5. (**) z et ses deux racines carrées forment-ils un triangle rectangle en z ? (*D'après concours centrale-SupElec PSI*)

Exercice 24.
À tout point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$. Établir que $|z'| = 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel et $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur. En déduire une construction géoétrique du point M'.

Exercice 25.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que les points d'affixes z, z^2 et $1/z$ soient alignés.

Exercice 26.

1. On note f la fonction $z \mapsto \dfrac{z+1}{z-2}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{2\}$. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}\backslash\{2\}$ pour lesquels :

   a) $|f(x)| = 1$. b) $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$.

2. On note g la fonction $z \mapsto \dfrac{2z-i}{z-2i}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{2i\}$. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}\backslash\{2i\}$ pour lesquels :

   a) $g(z) \in \mathbb{R}$. b) $g(z) \in \mathbb{U}$.

Exercice 27. (*) Soit U, V et Wtrois points d'affixes respectives, u, v et w.

1. Démontrer que le triangle (UVW) est équilatéral en sens direct si et seulement si $u-v = -j^2(w-v)$. En déduire que le triangle (UVW) est équilatéral de sens direct si et seulement si $u+jv+j^2w = 0$.

   Dans la suite, ABC est un triangle quelconque de sens direct et on construit les points P, Q et R tels que (BPC), (CQA) et (ARB) soient des triangles équilatéraux de sens direct. Ainsi ces trois triangles s'appuient extérieurement chacun sur les côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. On note maintenant $U(u)$, $V(v)$, et $W(w)$ les centres de gravité respectivement des triangles (BPC), (CQA) et (ARB).

2. Comparer $a+b+c$ et $u+v+w$. En déduire que le triangle (UVW) a le même centre de gravité que (ABC).
3. Montrer que le triangle (UVW) est équilatéral.