Exercice 17

Notons $\boxed{\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (racines n-ième de l'unité)

- Si $z$ est solution alors $z \neq 1$ et on a

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

d'où il existe $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que

$$\frac{z+1}{z-1} = \omega_k$$

$$\Leftrightarrow \quad (\omega_k - 1)z = \omega_k + 1$$

Pour $k=0$, on a $0=2$ alors nécessairement on a $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\omega_k \neq 1$

Par suite du calcul,

$$z = \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}$$

angles moitiés

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}}$$

définition de cotan

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z = -i\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{z = -i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}}$$

(Inversement, en remontant le calcul on obtient bien que $z$ est solution)

- Finalement

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \;\middle|\; k \in \{1, \dots, n-1\}\right\}}$$

(il y a exactement $n-1$ solutions car cot est injective sur $]0, \pi[$)