

Exercice 8

• Soit $x \in \mathbb{R}$,

D'après les formules d'Euler, on a :

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 1 \right)\end{aligned}$$

Ainsi, d'après les formules d'Euler :

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2} (\cos(2x) + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

• De même, soit $x \in \mathbb{R}$

D'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 1 \right)\end{aligned}$$

Ainsi, d'après les formules d'Euler :

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$,

D'après les formules d'Euler, on a :

$$\cos x \cdot \sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \times \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4$$

D'après le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\cos x \cdot \sin^4 x &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} (e^{5ix} - 4e^{3ix} + 6e^{ix} - 4e^{-ix} + e^{-3ix} + e^{3ix} - 4e^{ix} + 6e^{-ix} - 4e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} (e^{5ix} + e^{-5ix} - 3(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 2(e^{ix} + e^{-ix}))\end{aligned}$$

ou • $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\text{on a } \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\text{D'où } \cos^2(x) = \frac{1}{2} (\cos(2x) + 1)$$

ou • De même,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\text{D'où } \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$$

Ainsi, d'après les formules d'Euler,

$$\cos x \cdot \sin^4 x = \frac{1}{16} (\cos(5x) - 3\cos(3x) + 2\cos(x))$$

Ainsi, $\cos x \cdot \sin^4 x = \frac{1}{16} \cos(5x) - \frac{3}{16} \cos(3x) + \frac{1}{8} \cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$