Eléonore
PERBEN

PCSI

Complexes - Exercice 11.B. d)

Résolvons l'équation (E): $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

Discriminant Δ de (E):

$\Delta = (2(2+i))^2 - 4 \times 1 \times (6+8i)$

$= 4(3+4i - (6+8i))$

$\Delta = 4(-3-4i)$

Les solutions z_1 et z_2 de (E) sont de la forme

$z_1 = \dfrac{2(2+i)+\delta}{2}$ et $z_2 = \dfrac{2(2+i)-\delta}{2}$ avec $\delta^2 = \Delta$

Déterminons δ

Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta = \alpha + i\beta$

$\delta^2 = 4(-3-4i) \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = -12 - 16i$

C'est correct mais pourquoi ne pas calculer les racines carrées de -3-4i ? Les racines carrées de 4(-3-4i) seront celles de -3-4i multipliées par 2 !
Ca simpliefierait les calculs.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -12 \\ 2\alpha\beta = -16 \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{12^2 + 16^2} \end{cases}$ (module de δ^2 et de Δ)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -16 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -4 \end{cases}$

Ainsi $\delta = 2 - 4i$

Donc $z_1 = \dfrac{2(2+i) + 2 - 4i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{2(2+i) - 2 + 4i}{2}$

$= 2 + i + 1 - 2i$ $\qquad$ $= 2 + i - 1 + 2i$

$\boxed{z_1 = 3 - i}$ $\qquad$ $\boxed{z_2 = 1 + 3i}$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{3-i \, ; \, 1+3i\}$