

Exercice 15:

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n + 1 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad z^n = -1$$

On a $-1 = e^{i\pi}$,

Alors l'ensemble des solutions de l'équation

$$z^n + 1 = 0 \text{ est:}$$

$$S = \left\{ e^{i\pi/n} e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [0; n-1] \right\}$$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$:

$$z^5 = -i \quad (\Leftrightarrow) \quad z^5 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$S = \left\{ e^{i\frac{3\pi}{10}} e^{i\frac{2k\pi}{5}}, k \in [0; 4] \right\}$$

3) Soit $z \in \mathbb{C}$

$$z^5 = \frac{1+i}{1-i}$$

$$\text{On a: } \frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2} e^{i\pi/4}}{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2}$$

Ainsi l'ensemble de solutions de l'équation: $z^5 = \frac{1+i}{1-i}$

$$\text{est: } S = \left\{ e^{i\pi/10} e^{i\frac{2k\pi}{5}}, k \in [0; 4] \right\}$$