Exercice 11 : Soit $z \in \mathbb{C}$

1) On a les équivalences suivantes

$$z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0 \iff z^3$$

est solution de

$$Z^2 + (2i-1)Z - 1 - i = 0$$

Étudions cette dernière équation :

$$\Delta = (2i-1)^2 + 4(1+i)$$
$$= -4 - 4i + 1 + 4 + 4i$$
$$\Delta = 1 > 0$$

donc les solutions sont

$$Z = \frac{-2i+1+1}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

ou $$Z = \frac{-2i+1-1}{2} = -i$$

Par suite des équivalences on a :

$$z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0 \iff z^3 \in \{-i ; 1-i\}$$

$$\iff z^3 = -i \text{ ou } z^3 = 1-i$$

$$\iff z^3 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ ou } z^3 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ensuite

$$\iff z^3 = \left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^3 \text{ ou } z^3 = \left(\sqrt[6]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^3$$

$$\iff z \in \left\{e^{-i\frac{\pi}{6}} ; e^{i\frac{\pi}{2}} ; e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right\}$$
$$\text{ou } z \in \left\{\sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}\, e^{-i\frac{9\pi}{12}}\right\}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{e^{-i\frac{5\pi}{6}} ; \sqrt[6]{2}\, e^{-i\frac{9\pi}{12}} ; \sqrt[6]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}} ; e^{-i\frac{\pi}{6}} ; e^{i\frac{\pi}{2}} ; \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}\right\}}$$

Ce passage est inutile ! C'est du cours proposition 28 sur les complexes.

Pour ce passage on a :

Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube ; on a

$z_1 \neq 0$ car sinon $z_1 = z_2 = z_3 = 0$

Ainsi on obtient

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 = \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^3 = 1$$

Comme $\frac{z_2}{z_1} \neq \frac{z_3}{z_1} \neq 1$ alors les trois sont les trois racines cubiques de 1 qui sont

1 ; $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

On a alors

$$\boxed{z_2 = j z_1} \quad \text{et} \quad \boxed{z_3 = j^2 z_1}$$

(à une permutation près des indices).