9c)

$$C = \sum_{k=0}^{n} \sin(a + kh)$$

par définition de la forme exponentielle

$$= \sum_{k=0}^{n} Im\left(e^{i(a+kh)}\right)$$

par propriété de la forme exponentielle et grâce à la formule de Moivre

$$= Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ia} \times \left(e^{ih}\right)^{k}\right)$$

par propriété de la somme (e^{ia} est une constante)

$$= Im\left(e^{ia} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ih}\right)^{k}\right)$$

or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ih}\right)^{k} = \frac{1 - e^{i(n+1)k}}{1 - e^{ih}}$ On reconnait une somme usuelle et grâce à la formule de Moivre

* ⚠ avec $h \not\equiv 0 [2\pi]$

$$= \frac{e^{i\frac{(n+1)h}{2}}}{e^{i\frac{h}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{(n+1)h}{2}} - e^{i\frac{(n+1)h}{2}}}{e^{-i\frac{h}{2}} - e^{i\frac{h}{2}}}$$

on utilise la méthode de l'angle moitié

$$= e^{\frac{nh}{2}} \times \frac{\cancel{-2i} \sin\left(\frac{(n+1)h}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{h}{2}\right)}$$

grâce au propriété de la forme exponentielle et aux formules d'Euler

On a alors :

$$C = Im\left(e^{ia} \times e^{\frac{nh}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}\right)$$

par propriété de la forme exponentielle

$$\boxed{C = \sin\left(\frac{ahn}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}}$$

* Si $h \equiv 0 [2\pi]$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (e^{ih})^k = \sum_{k=0}^{n} 1$ On somme une constante

$= n$

Ainsi $c = \operatorname{Im}(e^{ia} \times n)$ $e^{ia} n = n(\cos a + i \sin a)$

par définition de la forme exp complexe

donc $\boxed{c = n \sin(a)}$