Exercice 12 B)

Résoudre le système d'inconnues complexes (x, y)

$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ x \cdot y = 13i \end{cases}$$

Résolution:

Soit x et y les solutions de l'équation : $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{C}$

$$x + y = 1 + i = \frac{-b}{a} \qquad x \cdot y = 13i = \frac{c}{a}$$

En divisant l'équation par a (possible car $a \neq 0$) on a :

$$x_0^2 + \frac{b}{a}x_0 + \frac{c}{a} = 0$$
$$x_0^2 - (i+1)x_0 + 13i = 0$$

Calcul du discriminant :

$$\Delta = (-(1+i))^2 - 4 \cdot 13i$$
$$\Delta = -50i$$

Calcul des racines du discriminant

On pose le complexe $y = (a + ib)$ tel que $y^2 = -50i$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} y^2 = -50i \\ |y^2| = |-50i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+ib)^2 = -50i \\ (a^2 + b^2) = 50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2aib = -50i \\ a^2 + b^2 = 50 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ ab = -25 \\ a^2 + b^2 = 50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 \\ ab = -25 < 0 \text{ donc } a \text{ et } b \text{ sont de signes différents} \\ 2a^2 = 50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = -25 \\ a^2 = 25 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -25 \\ a = \pm\sqrt{25} \quad b = \mp\sqrt{25} \end{cases}$$

Ainsi on a $\delta_1 = 5 - 5i$ et $\delta_2 = -5 + 5i$

Calcul des racines du polynôme

Ainsi les racines du polynômes sont :

$$x = \frac{1 + i + 5 - 5i}{-2} \qquad\qquad y = \frac{1 + i - 5 + 5i}{-2}$$
$$x = 3 - 2i \qquad\qquad y = -2 + 3i$$

Conclusion

On en déduit que le couple $(3 - 2i, -2 + 3i)$ est la solution du système.