Clara
LAGUNAS
PCSI

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$\arg\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right) = \arg((1-i\sqrt{3})^5) - \arg((1-i)^3$

de plus, $\arg((1-i\sqrt{3})^5 = 5\arg(1-i\sqrt{3})$
$= -5 \times \frac{\pi}{3}$

également on a $\arg((1-i)^3) = 3\arg(1-i)$
$= -3 \times \frac{\pi}{4}$

On a donc $\arg\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right) = -\frac{5\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = -\frac{11\pi}{12} [2\pi]$

Pourque $\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ soit un reel positif il faut que

$-\frac{11}{12}\pi \times n = 0 [2\pi] \iff -\frac{11\pi}{12} n = 2k\pi$

Il existe k
\in Z tel que

$\iff n = -\frac{24}{11} k$

pour que n soit un entier k doit être un multiple de 11

On a donc $\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ un ~~entier~~ reel positif quand n est un multiple de 24.