Exercice 11, b)

Benawiawa
Rayan

Résolvons l'équation $(2+i)z^2+(5-i)z+2-2i=0$
d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.
Calculons le discriminant Δ de cette équation :

$$\Delta=(5-i)^2-4(2+i)(2-2i)$$
$$=24-10i-(8+4i)(2-2i)$$
$$=24-10i-(16-16i+8i+8)$$
$$\Delta=-2i\neq 0$$

Cherchons $z=\rho e^{i\theta}$ avec $\rho\in\mathbb{R}_+$ et $\theta\in\mathbb{R}$
tel que $-2i=z^2$

Procédons par équivalence :

$$z^2=-2i \iff \begin{cases}\rho^2=\sqrt{(-2)^2}=2\\ 2\theta=-\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\end{cases}$$

Le réel ρ est strictement positif, il n'y a qu'une seule solution à la première équation.
d'où

$$z^2=-2i \iff \begin{cases}\rho=\sqrt{2}\\ \theta=-\frac{\pi}{4}\,[2\pi]\end{cases}$$

Ainsi $z=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=1-i$$
ou $z=-\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}=-1+i$

Avec $z = 1-i$, on a :

$$z_1 = \frac{-5+i+1-i}{2(2+i)} = \frac{-4}{2(2+i)} = \frac{-2(2-i)}{4+1} = \frac{-4+2i}{5}$$

$$\boxed{z_1 = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i}$$

et $z_2 = \frac{-5+i-1+i}{2(2+i)} = \frac{-6+2i}{2(3+i)} = \frac{-3+i\,(2-i)}{2+i} = \frac{-6+3i+2i+}{5}$

$$\boxed{z_2 = -1+i}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation
$z^2(2+i)+(5-i)z+2-2i=0$ sont donc : $\left\{-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i \,;\, -1+i\right.$