Lycée Condorcet
PCSI

Octobre 2024

# Calcul de primitives

## Table des matières



Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# 1 Généralités

## 1.1 Définitions

**Définition 1.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.
On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une **primitive** de $f$ sur $I$ si elle est dérivable sur $I$ et si :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

**Exemples**
L'application $x \mapsto x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'application $x \mapsto 2x$. De même l'application $x \mapsto x^2 + 18$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la même application.

**Proposition 2.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application alors :

- si $F$ et $G$ sont deux primitives de $f$ il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = G(x) + c$$

- Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ l'ensemble $\mathcal{P}_f$ des primitives de $f$ sur $I$ est :

$$\mathcal{P}_f = \{F + c, \quad c \in \mathbb{K}\}$$

**Corollaire 3.**

Soit $f$ une fonction définie sur $I$ admettant une primitive sur $I$, soit $a \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique primitive $F$ de $f$ sur $I$ telle que $F(a) = \alpha$.

## 1.2 Primitives usuelles et composition

**Proposition 4** (Primitives usuelles).

| Fonction | Paramètres | Une primitive | Un intervalle de définition |
|---|---|---|---|
| $x \mapsto x^n$ | $n \in \mathbb{N}$ | $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^p$ | $p \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ | $x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ | $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ |
| $x \mapsto x^\alpha$ | $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ | $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ | | $x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$ | $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ |

| Fonction | Une primitive | Un intervalle déf |
|---|---|---|
| $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto \sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto -\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \tan x$ | $x \mapsto -\ln(\lvert\cos x\rvert)$ | $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[; k \in \mathbb{Z}$ |
| $x \mapsto \mathrm{ch} x$ | $x \mapsto \mathrm{sh} x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \mathrm{sh} x$ | $x \mapsto \mathrm{ch} x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto e^x$ | $x \mapsto e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \ln x$ | $x \mapsto x\ln x - x$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x \mapsto \arcsin x$ | $]-1, 1[$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ | $x \mapsto \arctan x$ | $\mathbb{R}$ |

| Fonction | Paramètres | Une primitive | Un intervalle déf |
|---|---|---|---|
| $x \mapsto e^{\lambda x}$ | $\lambda \in \mathbb{C}^*$ | $x \mapsto \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ | $a \in \mathbb{R}^*$ | $x \mapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ | $\mathbb{R}$ |

**Proposition 5.**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $I$ et $F$ et $G$ des primitives de respectivement $f$ et $g$ sur $I$. Alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda F + \mu G$ est une primitive sur $I$ de la fonction $\lambda f + \mu g$.

**Proposition 6.**

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et à valeur dans l'intervalle $J$ et $\varphi$ une fonction dérivable sur $J$. Alors la fonction $x \mapsto \varphi(u(x))$ est une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x)\varphi'(u(x))$ sur $I$.

En particulier, si $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$, pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $u : I \to J$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. On liste dans le tableau ci-dessous une liste des cas particuliers de la proposition précédente où $F$ est une fonction usuelle dérivable sur l'intervalle $J$ qui n'est pas précisé ici (on fait confiance au lecteur !)

| **Fonction** | **Une primitive** |
|---|---|
| $u'u$ | $\frac{1}{2}u^2$ |
| $u'u^\alpha (\alpha \neq -1)$ | $\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$ |
| $u'e^u$ | $e^u$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ |
| $\dfrac{u'}{u}$ | $\ln(\lvert u\rvert)$ |
| $\dfrac{u'}{1+u^2}$ | $\arctan(u)$ |
| $u'\cos(u)$ | $\sin(u)$ |
| $u'\sin(u)$ | $-\cos(u)$ |

**Exemple 1**

Calculer pour chacune des fonctions ci-dessous une primitive (on précisera sur quel intervalle).

$$a)\quad \sin(3x), \qquad b)\quad \cos x \sin x \qquad c)\quad xe^{x^2}, \qquad d)\quad \tan x, \qquad e)\quad \frac{x}{1+x^2}, \qquad f)\quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

## 2 Existence de primitives pour une fonction continue

Dans cette partie et dans la suivante nous allons utiliser l'intégrale de Riemann. Nous verrons sa définition au semestre prochain mais nous en rappelons brièvement les différentes propriétés.

Tout d'abord on peut voir le calcul intégrale comme le calcul de l'air entre la courbe d'une fonction et l'axe des abscisses.

1. **Positivité**. Si $f$ est une fonction continue positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est un nombre positif.
2. **Croissance**. Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ et telles que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.
3. **Linéarite**. Si $f$ et $g$ dont deux fonctions continues sur $[a, b]$ et $\lambda$ et $\mu$ deux réels, alors
$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$
4. **Relation de Chasles** Si $f$ est une fonction continue sur $[a, b]$, par définition $\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. Si maintenant$a$, $b$, et $c$ sont trois points d'un intervalle $I$ sur lequel $f$ est continue, alors
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$
5. **Inégalité triangualire**. Si $f$ est une fonction continue sur $[a, b]$ alors
$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$$

Nous avons vu la définition d'une primitive d'une fonction. Il est alors naturel de se demander si une fonction admet toujours une primitive. Le théorème suivant est une réponse à cette question pour les fonctions continues.

**Théorème 7** (Théorème fondamental de l'analyse)**.**

Si $f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$ et si $x_0$ est un élément de $I$, alors la fonction :

$$\begin{array}{rccl} F: & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array}$$

est une primitive de $f$. Plus particulièrement c'est la primitive de $f$ qui s'annule en $x_0$.

**Corollaire 8.**

Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet des primitives sur cet intervalle.

**Théorème 9.**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et $F$ une primitive de $f$ sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

L'élément $F(b) - F(a)$ est noté $[F(x)]_a^b$ et appelé **variation de $F$ de $a$ à $b$.**

# 3 Recherche de primitives et calculs d'intégrales

## 3.1 Intégration par parties

**Définition 10.**

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur un intervalle $I$ si elle est dérivable sur $I$ et si sa dérivée $f'$ est continue sur $I$.

**Proposition 11.**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. On a

$$\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t.$$

**Exemple 2**

À l'aide d'une intégration par parties, calculer

1. l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 te^t\ \mathrm{d}t$
2. des primitives pour les fonctions ci-dessous :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\cos(x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{array}$$

**Exemple 3**

Pour tout entier naturel $n$, on définit $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^n\ \mathrm{d}x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ établir un lien entre $I_{n+1}$ et $I_n$.

### 3.2 Changement de variable

**Proposition 12.**

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'interieurs non vides, $f$ une fonction continue sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\varphi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $J$ dans $I$. Alors :

$$\forall(\alpha,\beta)\in J^2,\quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\ \mathrm{d}u = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Les physiciens ont un bon moyen mnémotechnique pour se souvenir de la formule : ils posent

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \varphi(t) \\ \mathrm{d}x & = & \varphi'(t)\ \mathrm{d}t \end{array}\right.}$$

En remplaçant formellement, on a bien :

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

et il n'y a plus qu'à écrire les bonnes bornes.

**Exemple 4**

1. En posant $x = \sin t$, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$.
2. À l'aide du changement de variable de votre choix, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t+1}\ \mathrm{d}t$.

**Remarque** : Ces deux exemples sont deux formes différentes d'applications de la proposition précédente.

### 3.3 Quelques calculs classiques

#### 3.3.1 Exitation périodique avec amortissement

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\omega\in\mathbb{R}_+^*$. On veut calculer une primitive pour chacune de ces deux fonctions :

$$f: t\mapsto e^{\alpha t}\cos(\omega t),\qquad \text{et}\qquad g: t\mapsto e^{\alpha t}\sin(\omega t)$$

**Méthode.**

On passe par $\mathbb{C}$ pour trouver ces primitives.
On a, pour tout $t\in\mathbb{C}$ :

$$e^{\alpha t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{(\alpha+i\omega)t}\right)\qquad \text{et}\qquad e^{\alpha t}\sin(\omega t) = \mathrm{Im}\left(e^{(\alpha+i\omega)t}\right)$$

Or $t\mapsto \dfrac{1}{\alpha+i\omega}e^{(\alpha+i\omega)t}$ est une primitive de $t\mapsto e^{(\alpha+i\omega)t}$ sur $\mathbb{R}$. On peut alors calculer :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} F(t) & := & \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\alpha+i\omega}e^{(\alpha+i\omega)t}\right) & = & \dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2}(\alpha\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)) \\ G(t) & := & \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\alpha+i\omega}e^{(\alpha+i\omega)t}\right) & = & \dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2}(\alpha\sin(\omega t)-\omega\cos(\omega t)) \end{array}\right.$$

La fonction $F$ est alors une primitive de $f$ et la fonction $G$ une primitive de $g$.

**Exemple 5**

Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto e^{3x}\cos(2x)$.

### 3.3.2 Inverse de trinôme

Soient $a$, $b$, $c$ avec $a \neq 0$. Il s'agit ici de proposer une primitive de

$$f : x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

On sait que trois cas se présentent :

- **Le trinôme a une racine double $\gamma$.**
  On peut écrire :
  $$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - \gamma)^2}$$
  En voici une primitive sur $]-\infty, \gamma[$ ou $]\gamma, +\infty[$.
  $$F : x \mapsto -\frac{1}{a} \times \frac{1}{x - \gamma}$$
- **Le trinôme possède deux racines distinctes $\alpha$ et $\beta$.**
  On peut alors montrer qu'il existe deux constantes $A$ et $B$ telles que :
  $$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}$$
  En voici une primitive sur $]-\infty, \alpha[$ ou $]\alpha, \beta[$ ou $]\beta, +\infty[$ :
  $$F : x \mapsto A \ln|x - \alpha| + B \ln|x - \beta|$$
  En fait on a toujours $A = -B$ ce qui permet d'écrire la primitive sous la forme $x \mapsto A \ln\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right|$.
- **Le trinôme n'a pas de racines réelles.**
  On sait alors mettre le trinôme sous forme canonique : il existe deux constantes $A$ et $B$ telles que
  $$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a((x + A)^2 + B^2)}$$
  En voici donc une primitive :
  $$F : x \mapsto \frac{1}{aB} \arctan\left(\frac{x + A}{B}\right)$$

**Méthode.**

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels distincts. Il existe deux constantes $A$ et $B$ réelles telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\alpha, \beta\} \qquad \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

Cette écriture est appelée **décomposition en éléments simples**. On donne en classe deux méthodes pour trouver $A$ et $B$.
On aura toujours $A = -B$ car si on multiplie par $x$ dans l'égalité et que l'on fait tendre $x$ vers $+\infty$, on obtient $0 = A + B$.

**Exemple 6**

Calculer les primitives des deux fonction suivantes (on précisera l'intervalle de définition considéré).

$$a) x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \qquad \text{et} \qquad b) x \mapsto \frac{1}{3x^2 + x + 1}$$