Lycée Condorcet Novembre 2024
PCSI

Calculs de primitives

Exercice 1.
Calculer les intégrales suivantes :
a) $\displaystyle\int_1^2 x^n \ln(x)\ dx \quad (n \in \mathbb{N})$ b) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)e^{2x}\ dx$ c) $\displaystyle\int_1^x \ln(t)^2\ dt \quad (x>0)$ d) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\ dx$
e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\ dx$ f) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ g) $\displaystyle\int_0^x \sin(t)e^t\ dt \quad (x \in \mathbb{R})$ h) $\displaystyle\int_0^x t\sin(t)\mathrm{e}^t\ dt \quad (x \in \mathbb{R})$
i) $\displaystyle\int_1^x \ln(1+\sqrt{t})\ dt \quad (x \in \mathbb{R}_+^*)$

Exercice 2.
A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser l'intervalle sur lequel elle est définie :

1. $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}x}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$
4. $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x(e^x+1)}$
6. $x \mapsto \dfrac{3}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ poser $u(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
7. $x \mapsto \dfrac{1}{\tan x + 1}$ poser $u(x) = \tan(x)$

Exercice 3.
Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$. A l'aide du changement de variable de votre choix, démontrer l'égalité :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\ \mathrm{d}t$$

Exercice 4.
Justifier que la fonction

$$x \to \frac{e^x}{e^{2x}-e^x+1}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et en calculer une primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.
En posant le changement de variable $u = \tan x$, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x$$

Exercice 6.
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué entre parenthèse :
a) $\displaystyle I = \int_0^{10} \frac{x}{(x^2+2)(x^2+1)}dx\ (y = x^2)$, b) $\displaystyle J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx\ (t = \tan\tfrac{x}{2})$,

c) $K = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx \left(y = \frac{x}{x+1}\right)$, d) $L = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t dt$, $(u = \sin t)$,

e) $M = \int_{1}^{2} \frac{1}{t(t^3+1)} dt$ $(u = t^3)$,

Exercice 7.

On note I et J les intégrales suivantes :

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt, \quad J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt$$

1. Montrer que $I = J$.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+x} dx$. On pourra procéder au changement de variable $x = \cos t$.

Exercice 8.

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2} dx$$

1. Calculer u_0. Puis calculer u_1.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$
   En déduire u_2 et u_3.

Exercice 9.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t \, dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} + t_n = \frac{1}{2n+3}$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Calculer $\lim_{n \to \infty} n t_n$ (tout en justifiant que cette limite existe).

Exercice 10.

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivées :

$$1) \ x \longmapsto \int_{x}^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} \qquad 2) x \longmapsto \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t} \, \mathrm{d}t$$