Lycée Condorcet Novembre 2024
PCSI

Exercice 1. Intégrales d'Euler
Pour p et q deux entiers naturels, on note

$$I(p,q) := \int_0^1 t^p(1-t)^q \, \mathrm{d}t.$$

1. En posant le changement de variable $u = 1-t$, démontrer que pour tout couple d'entiers $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p,q) = I(q,p)$.
2. Démontrer
$$\forall p,q \in \mathbb{N} \quad (p+1)I(p,q+1) = (q+1)I(p+1,q).$$
3. (a) Calculer $I(p,0)$, pour un entier p donné.
   (b) Démontrer que si p et q sont deux entiers naturels, on a
$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$
4. Pour $p,q \in \mathbb{N}$, on pose
$$J(p,q) = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p+1} (\cos\theta)^{2q+1} \, d\theta.$$
À l'aide d'un changement de variable bien choisi, démontrer l'égalité
$$J(p,q) = \frac{1}{2} I(p,q).$$

Exercice 2.
On considère la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^4} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F, et préciser son signe en fonction de x.
2. Étudier la parité de F.
3. Justifier que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations. Retrouver le signe de F.

Exercice 3. Intégrales de Wallis
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$.
   En déduire une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
4. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
5. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et préciser sa valeur.
6. En déduire l'expression de W_{2n+1} pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.