Lycée Condorcet
PCSI

Novembre 2024

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Table des matières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera les ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

Définition 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues sur I.

- On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** l'équation :

$$(E) \qquad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

- On dit qu'une application $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E) si f est dérivable sur I et si pour tout $t \in I$

$$f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$$

Remarques.

- Soit f une solution de (E) sur I, par définition f est dérivable sur I. Elle est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur I puisque $f'(t) = b(t) - a(t)f(t)$ qui, par hypothèse est continue sur I.
- si α est une application de I à valeur dans $\mathbb{K}$ alors une équation différentielle de la forme :

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$$

  peut se ramener sur un intervalle où α ne s'annule pas à la forme précédente en divisant par α. On parle de forme normalisée.

2 Résolution d'une équation homogène

Définition 2.

Soie I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonction continues définies sur I.
Une équation linéaire **homogène (ou sans second membre)** est une équation du type

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

Si on a l'équation différentielle (E), $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ alors l'équation (E_0) $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à (E).

Dans toute la suite du paragraphe a est une fonction continue définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et (E_0) est l'équation différentielle :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

Proposition 3.

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solution de (E_0) est stable par combinaisons linéaires. Cela signifie que :

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(f,g) \in \mathcal{S}_0^2, \qquad \lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_0$$

Proposition 4.

Pour toute fonction continue $a : I \to \mathbb{K}$, les solutions de $y' + ay = 0$ sont

$$t \mapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)}$$

où A est une primitive de la fonction a sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$. Plus précisément l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$ de cette équation sur I est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{K}\right\}$$

Corollaire 5.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + \alpha y = 0$ sont l'ensemble des fonctions :

$$t \mapsto \lambda e^{-\alpha t}$$

où λ parcours tout $\mathbb{K}$.

Remarque.

- La seule solution qui s'annule est la fonction nulle.

Exemple 1

1. Résoudre l'équation $\sin(t)y'(t) - \cos(t)y(t) = 0$ sur $I =]0, \pi[$.
2. Résoudre $2ty'(t) - y(t) = 0$

3 Résolution d'une équation avec second membre

3.1 Forme générale

Proposition 6.

Soit (E) $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ une équation linéaire du premier ordre avec $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues.
Alors toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (E) une solution de l'équation homogène associée (E_0).
Ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de(E) satisfait :

$$\mathcal{S} = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_0\}$$

Exemple 2

Résoudre l'équation (E) : $(1 + x^2)y' + y = 1$

Il faut donc une méthode générale pour trouver une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Voici tout d'abord une proposition pratique qui peut permettre de scinder le second membre afin de se ramener à plusieurs équations différentielles dont les second membres seront plus simples à traiter.

Proposition 7 (Principe de superposition)**.**

Soient a, b_1, b_2 $I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues.
Si f_1 est solution sur I de $y' + ay = b_1$ et f_2 est solution sur I de $y' + ay = b_2$ alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution de

$$y' + ay = \lambda b_1 + \mu b_2.$$

3.2 Méthode de la variation de la constante

Cette méthode est due au mathématicien Lagrange.

Méthode.

L'idée est de chercher une solution de (E) de la forme $z : x \mapsto \lambda(x)u(x)$, où u est une solution non nulle de l'équation homogène (E_0) et λ une fonction dérivable de notre choix. Il nous faut comprendre comment **choisir** la fonction λ pour que la fonction z soit solution de (E). On a

$$\begin{array}{rcl} z' + az & = & (\lambda u)' + a(\lambda u) \\ & = & \lambda' u + \lambda u' + \lambda u a \\ & = & \lambda' u + \lambda(u' + au) \end{array}$$

Or le dernier facteur est nul car u est une solution de l'équation homogène (E_0). Ainsi,

$$\begin{array}{rccl} z \text{ est solution de } (E) & \iff & z' + az = b & \text{sur } I \\ & \iff & \lambda' u = b & \text{sur } I. \end{array}$$

Mais u s'écrit sous la forme $u = e^{-A}$, où A est une primitive de a, on a

$$z \text{ est solution de } (E) \iff \lambda' = be^A \quad \text{sur } I$$

Notre fonction z sera donc solution de (E) si et seulement si λ est choisie parmi les primitives de be^A.

Exemple 3

Résoudre $y' + 2xy = \cos(x)e^{-x^2}$.

3.3 Solutions particulières pour équations avec second membres particuliers

On cherche ici à résoudre une équation différentielle à coefficients constants

$$y' + ay = f$$

où f est une fonction et a une constante non nulle.
Tous ces cas se démontre en utilisant la méthode de la variation de la constante.

• Si f est une fonction constante égale à C.
Une solution particulière est :

$$x \mapsto \frac{C}{a}$$

• Si f est une fonction polynômiale de degré n.
On cherchera alors une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré n.

• **Si f est une fonction de la forme $f(x) = P(x)e^{sx}$.**
Où P est un polynôme de degré n et s est un réel.
On cherchera alors une solution particulière sous la forme

$$x \mapsto Q(x)e^{sx}$$

où Q est un polynôme de degré n si $s \neq -a$ et de degré $n+1$ si $s = -a$.
• **Si** $f(x) = \alpha\cos(\omega x + \varphi) + \beta\sin(\omega x + \varphi)$
où α, β, φ sont des réels et ω est un réel non nul. On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$x \mapsto A\cos(\omega x + \varphi) + B\sin(\omega x + \varphi)$$

4 Résolution avec conditions initiales

Définition 8.

Etant données deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on considère l'équation différentielle (E) $y' + ay = b$.
Le **problème de Cauchy** associé au couple (t_0, y_0) où $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ est la recherche des solutions y de (E) vérifiant la condition initiale (ou condition de Cauchy) $y(t_0) = y_0$.

Théorème 9 (de Cauchy-Lipschitz, cas linéaire)**.**

Soient deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + ay = b$$

Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy associé à la condition initiale $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution sur I.

Démonstration : D'après le théorème précédent, l'équation différentielle admet des solutions. On en fixe une que l'on note z. Si A est une primitive fixée de a sur I, alors les solutions sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto z(x) + \lambda e^{-A(x)}.$$

Parmi ces fonctions, on veut distinguer celles qui satisfont la condition initiale. On écrit donc

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0 \quad &\iff \quad z(x_0) + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0 \\ &\iff \quad \lambda = e^{A(x_0)}(y_0 - z(x_0)) \end{aligned}$$

Il existe donc une unique valeur pour λ pour laquelle $y(x_0) = y_0$; notons-la λ_0. Le problème de Cauchy possède une unique solution : la fonction $y = \lambda_0 e^{-A}$. ■

Exemple 4

Résoudre $y' - \dfrac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ avec pour condition initiale $y(1) = 1$.