Lycée Condorcet
PCSI

Novembre 2024

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Table des matières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera les ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Généralités

Définition 1.

Soient a, b et c tois scalaires avec $a \neq 0$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.

- On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** l'équation :
$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = f$$
- La fonction f s'appelle le **second membre**.
- On dit qu'une application $z : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E) si z est dérivable deux fois sur I et si pour tout $t \in I$
$$az''(t) + bz'(t) + cz(t) = f(t)$$
- Une telle équation est équivalente à une équation du type :
$$y'' + \alpha y' + \beta y = g$$
avec α et β sont deux scalaires.

Dans la suite du cours on s'interessera aux équations sous la dernière forme.
Remarque.

- Soit z une solution de (E) sur I, par définition z est deux fois dérivable sur I. Elle est en fait de classe $\mathcal{C}^2$ sur I puisque $z'' = \frac{1}{a}f + \frac{b}{a}z' - \frac{c}{a}z$ qui, par hypothèse, est continue sur I.

2 Résolution de équation homogène

Définition 2.

Soient a et b deux scalaires et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonctions continue.
Une équation linéaire du second ordre à coefficients constants **homogène (ou sans second membre)** est une équation du type
$$y'' + ay' + by = 0$$
Si on a l'équation différentielle (E), $y'' + ay' + by = f$ alors l'équation (E_0) $y'' + ay' + by = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à (E).

Dans toute la suite du paragraphe a et b sont deux scalaires et $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue définie sur I et (E_0) est l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0$$

Proposition 3.

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solution de (E_0) est stable par combinaison linéaire. Cela signifie que :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(f, g) \in \mathcal{S}_0^2, \qquad \lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_0$$

De plus la fonction nulle est toujours solution.

Le but de ce paragraphe est donc de trouver les solutions de l'équation (E_0).
L'idée centrale ici est de considérer, pour $r \in \mathbb{C}$, la fonction $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{rx} \end{array} \right.$. La fonction u est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u' = ru$ et $u'' = r^2 u$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'' + au' + bu = (r^2 + ar + b)u$$

On voit donc que

$$u : x \mapsto e^{rx} \text{est solution de } (E_0) \text{ si et seulement si } r^2 + ar + b = 0$$

Ceci motive la définition suivante

Définition 4.

On appelle **équation caractéristique** associée à (E_0) l'équation :

$$x^2 + ax + b = 0$$

où a et b sont les coefficients constants de (E_0).

On rappelle qu'une telle équation a deux racines r_1 et r_2, avec $r_1 + r_2 = -a$. On a $r_1 = r_2$ (racine "double") si et seulement si l'une des deux vaut $-a/2$.

Lemme 5.

Soit l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$ associée à (E_0) et r une racine de cette équation.

- La fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_0)
- Si r est une racine double, $x \mapsto xe^{rx}$ est solution de (E_0).

Théorème 6 (Solutions complexes d'une équation homogène)**.**

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique de l'équation homogène (E_0) $(x^2 + ax + b = 0)$.
On note $\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions de (E_0) à valeurs complexes.

- Si $\Delta \neq 0$ l'équation caractérisitique admet deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$, notons les r_1 et r_2 alors :

$$\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double dans $\mathbb{C}$, notons la r et

$$\mathcal{S}_0^{\mathbb{C}} = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

Dans le cas des coefficients réels on peut déduire de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème 7 (Solutions réelles d'une équation homogène).

Supposons que a et b soient réels.
On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (E_0), $(x^2 + ax + b = 0)$. Notons $\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des soultionsde (E_0) à **valeurs réelles**.

- Si $\Delta > 0$ l'équation caractéristique a deux racines **réelles** disctintes, notons les r_1 et r_2 et

$$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Si $\Delta = 0$ l'équation caractéristique a une racine double **réelle**, notons la r et

$$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \{t \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Si $\Delta < 0$ l'équation caractéristique a deux racines **complexes conjuguées**, notons les $r_1 = \gamma + i\omega$ et $r_2 = \gamma - i\omega$ et

$$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} = \{t \mapsto e^{\gamma t}(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

Remarque La démonstration de ce théorème repose principalement sur l'idée simple suivante : si (E_0) est à coefficients réels, elle est a fortiori à coefficients complexes. Ainsi , toute solutions à valeurs réelles de (E_0) est a fortiori une solution à valeurs complexes. Ceci peut s'énoncer à l'aide de l'inclusion :

$$\mathcal{S}_0^{\mathbb{R}} \subset \mathcal{S}_0^{\mathbb{C}}.$$

Exemple 1

Pour chacune des équations ci-dessous écrire l'ensemble des solutions complexes puis des solutions réelles :

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$.
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
3. $y'' + y' + y = 0$.

3 Résolution d'une équation avec second membre

Dans toute la suite du paragraphe a et b sont deux scalaires et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue définie sur I et (E) est l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = f$$

3.1 Forme générale

Proposition 8.

Toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de (E) une solution de l'équation homogène associée (E_0).
Ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de(E) satisfait :

$$\mathcal{S} = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_0\}$$

Remarque.

- Pour obtenir l'ensemble des solutions de (E), il faudra donc déterminer une solution particulière de (E) et lui ajouter l'ensemble des solutions de (E_0) (dont on a vu la forme).

Proposition 9 (Principe de superposition).

Soient f_1 et f_2 $I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
Si z_1 est solution sur I de $y'' + ay' + by = f_1$ et z_2 est solution sur I de $y'' + ay' + by = f_2$ alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda z_1 + \mu z_2$ est solution de

$$y'' + ay' + by = \lambda f_1 + \mu f_2.$$

3.2 Solution particulière pour équation avec second membres particuliers

Le programme de première année limite l'étude des équations non homogènes à des exemples importants pour les applications : on considère dans ce qui suit des seconds membres de la forme :

$$x \mapsto Ae^{\alpha x}, \text{ avec } (\alpha, A) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } t \mapsto A\cos(\omega t) \text{ ou } t \mapsto A\sin(\omega t), \text{ avec } (\alpha, A) \in \mathbb{C}^2$$

Proposition 10.

Soient A et α deux scalaires. L'équation

$$y'' + ay' + by = Ae^{\alpha x}$$

admet une solution particulière de la forme

- $x \mapsto Be^{\alpha x}$ si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $x \mapsto Bxe^{\alpha x}$ si α est une racine simple de l'équation caractéristique,
- $x \mapsto Bx^2e^{\alpha x}$ si α est une racine double de l'équation caractéristique,

où B est une constante (de $\mathbb{K}$) à déterminer.

Considérons maintenant un cas particulier important pour les applications : celui où le second membre est de la forme $t \mapsto A\cos(\omega t)$, ou $t \mapsto A\sin(\omega t)$.

Méthode.

Soient $A \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (E) une équation du type

$$y'' + ay' + by = A\cos(\omega t), \text{ ou } y'' + ay' + by = A\sin(\omega t)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(e^{i\omega t}) \text{ et } \sin(\omega t) = \mathrm{Im}(e^{i\omega t})$$

On sait trouver une solution particulière de l'équation auxiliaire complexe

$$y'' + ay' + by = Ae^{i\omega t} \qquad (E_{\mathbb{C}})$$

Reste à sélectionner la partie réelle ou la partie imaginaire pour obtenir une solution de (E).

- Si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on obtiendra une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$ de la forme $t \mapsto Be^{i\omega t}$ avec $B \in \mathbb{C}$. En sélectionnant la partie réelle/imaginaire, on obtient une solution du type

$$z : t \mapsto \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$$

  avec α et β deux réels.
- Si $i\omega$ est racine de l'équation cractéristique, alors on aura $a = 0$ et b sera un réel positif que l'on notera $b = \omega^2$. L'équation complexe associée à (E) est de la forme

$$y'' + \omega^2 y = Ae^{i\omega t}.$$

On obtiendra une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$ de la forme $t \mapsto Bte^{i\omega t}$ avec $B \in \mathbb{C}$. En sélectionnant la partie réelle/imaginaire, on obtient une solution du type

$$t \mapsto t(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)),$$

avec α et β deux réels.

Exemple 2

Résoudre les équations différentielles :

1. $y'' - y' - 2y = 2\mathrm{ch}(x)$
2. $y'' + 4y = \cos t$
3. $y'' + 4y = \cos(2t)$

4 Résolution avec conditions initiales

Définition 11.

Etant données deux réels a et b et une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ on considère l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = f$$

Le **problème de Cauchy** associé au triplet (t_0, y_0, y_0') où $t_0 \in I$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$ est la recherche des solutions y de (E) vérifiant la condition initiale (ou condition de Cauchy) $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.

Théorème 12 (de Cauchy-Lipschitz, cas linéaire)**.**

Pour tout $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy associé aux conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$ admet une unique solution sur I.

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle suivante, avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$:

$$y'' + 2y' + y = \cos(2t)$$