Lycée Condorcet 09 décembre 2023
PCSI

Devoir surveillé 4
Mathématiques

4 heures

Questions de cours

1. Donner la définition d'un intervalle (celle du chapitre des propriétés de $\mathbb{R}$).
2. Soit I un intervalle (au sens de ci-dessus) non majoré et minorée.
   Rappeler pourquoi I admet une borne inférieure. On la notera a. On suppose que $a \notin I$.
   Montrer que $I =]a, +\infty[$.

Calculs divers

1. (a) À l'aide du changement de variables $x = \sqrt{t}$ calculer l'intégrale :

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

   (b) À l'aide du changement de variables $t = \arctan(x)$, montrer qu'on a

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)^2\,\mathrm{d}t$$

   et calculer l'intégrale.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)$$

3. (a) Donner le terme général de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

   (b) Donner le terme général de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Problème 1 : Recollement

Soit l'équation différentielle
$$y'(x) - \frac{2}{x}|y(x)| = 1 \qquad (E).$$
Elle est du premier ordre mais n'est pas linéaire : on ne peut pas lui appliquer directement les résultats de notre cours. On va chercher ses solutions, c'est à dire les fonctions $y : x \mapsto y(x)$ dérivables sur $]0, +\infty[$ telles que l'égalité (E) est satisfaite pour tout $x > 0$. On pose les deux équations auxiliaires.
$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 1 \qquad (E^+)$$
et
$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = 1 \qquad (E^-).$$

1. (a) Déterminer S^+, l'ensemble des solutions de (E^+) sur $]0, +\infty[$.
   (b) Déterminer S^-, l'ensemble des solutions de (E^-) sur $]0, +\infty[$.
2. Pour résoudre (E), on raisonne par analyse-synthèse. Supposons que f soit une solution de (E) sur $]0, +\infty[$, c'est à dire une fonction dérivable sur cet intervalle telle que l'égalité (E) soit vraie pour tout $x > 0$.
   (a) Montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que f n'est pas strictement positive sur $]0, +\infty[$.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde, et utiliser la question 1.
   (c) Montrer que f n'est pas strictement négative sur $]0, +\infty[$.
   (d) En déduire l'existence d'un unique réel γ strictement positif tel que $f(\gamma) = 0$. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point γ.
3. Démontrer que les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3 - \gamma^3}{3x^2} & \text{si } x \in]0, \gamma] \\[2ex] \dfrac{x(x-\gamma)}{\gamma} & \text{si } x \in]\gamma, +\infty[\end{cases}$$
   où γ est un réel strictement positif.

Problème 3 :Équations d'Euler

Soient a et b deux nombres réels et c une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. L'équation différentielle suivante est appelée équation d'Euler :
$$t^2y'' + aty' + by = c(t) \quad (E)$$
Elle ne fait pas partie des équations que le cours nous apprend à résoudre. En utilisant un *changement de fonction inconnue*, on va se ramener à une équation que l'on sait traiter.

Partie A. Résoudre $y'' - 2y' + 5y = e^{2x} \qquad (E_0)$

Partie B. Changement de fonction inconnue.

Soit $y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) \end{array} \right.$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On définit $z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(e^x) \end{array} \right.$ (noter le changement de variable muette).

1. Justifier que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer z' et z'' en fonction de y et de ses dérivées.
2. Montrer que y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, que l'on précisera.

Partie C. Application.

En utilisant la partie B, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation d'Euler

$$t^2y'' - ty' + 5y = t^2 \quad (E_1).$$

Problème 2 : Différence symétrique

Soit E un ensemble non vide.

Partie 1 : Fonction indicatrice

Pour toute partie non vide A de E, on définit l'application indicatrice de A notée $\mathbb{1}_A$, par :

$$\mathbb{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \mathbb{1}_A(x) \end{array} \right.$$

avec pour tout $x \in E$:

$$\mathbb{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{array} \right.$$

Soit A et B deux parties de E. Montrer les propriétés suivantes :
les démonstrations demandées se font, pour la plupart, par disjonction de cas.

1. On a l'équivalence : $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
   On rappelle que l'égalité entre les fonctions se traduit par :
   $$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$$
2. On a l'égalité de fonctions : $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$.
3. On a l'égalité de fonctions : $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
4. On a l'égalité de fonctions : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
5. On a l'égalité de fonctions : $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A \times (1 - \mathbb{1}_B)$.

Dans la suite du problème on admettra que

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A \times (1 - \mathbb{1}_B)$$

Partie 2 : Différence symétrique

Si A et B sont deux parties de E, on appellera *différence symétrique* de A et B la partie de E définie par :

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

1. Montrer que : $\quad A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
2. En déduire que : $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_1\mathbb{1}_B$.
3. Soient A, B et C trois parties de E. En utilisant les résultats de la question précédente, démontrer les propriétés suivantes :
   (a) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.
   (b) $A\Delta B = A\Delta C \quad \Longrightarrow \quad B = C$
   (c) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

Partie 3 : Résolution d'une équation

Soient A et B deux parties de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On définit l'application :

$$\Phi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & A\Delta X \end{array} \right.$$

4. Soit X une partie de E.
   (a) Calculer $A\Delta A$ et $A\Delta X$.
   (b) Utiliser les résultats de la partie 2 pour en déduire la valeur de $\Phi_A(\Phi_A(X)$.
5. En déduire que Φ_A admet une application réciproque et la donner.
6. Déduire de ce qui précède que, pour toutes parties A et B fixées ou X est l'inconnue, l'équation $A\Delta X = B$ possède une unique solution que l'on exprimera en fonction de A et B.