Lycée Condorcet — Novembre 2023

PCSI

Equations différentielles d'ordre 1.

Exercice 1. Equations homogènes
Résoudre les équations suivantes :

(1) $y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$
(2) $xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(3) $xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
(4) $y' + \frac{2x^3}{1+x^4} y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.
Résoudre les équations suivantes :

(1) $y' - 5y = x$ sur $\mathbb{R}$.
(2) $y' + 4y = 2xe^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.
(3) $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
(4) $(1+x^2)y' - xy = 1$ sur $\mathbb{R}$.
(5) $y' + y = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.
(6) $y' - 2xy = \mathrm{sh}(x) - 2x\mathrm{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$.
(7) $xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]0,1[$.
(8) $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3.
Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$, $y' - 3y = x + e^{-x}$.
Donner la solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y' - 3y &= x + e^{-x} \\ y(0) &= 2 \end{cases}$.

Exercice 4.
On considère l'équation différentielle $xy' + y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1. Résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.
On considère l'équation $xy' + y = \cos(x)$.

1. La résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Existe-t'il une solution sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6.
On considère l'équation différentielle (E) : $y' \sin(x) - \cos(x)y = \sin^2(x)$.

1. Résoudre (E) sur les intervalles $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2. Déterminer les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Déterminer les solutions de (E) vérifiant $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y(\pi) = 0$ et $y(\pi) = 0$.

Exercice 7.
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit f une solution de (E). Montrer que la fonction $g : x \mapsto -f(-x)$ est une solution de de (E).
2. En déduire que (E) admet une unique solution impaire.

Exercice 8.
On note (E) l'équation différentielle $-x^2y' - xy = y^2$ sur $I =]1, +\infty[$.

1. Peut-on résoudre (E) avec les techniques vues en cours ?
2. En procédant eu changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y}$, déterminer les solutions de (E) qui ne s'annulent pas sur I.

Equations différentielles d'ordre 2.

Exercice 9.
Résoudre les équations suivantes :

(1) $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{C}$.
(2) $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{C}$.
(3) $y'' - y' + (1+i)y = 0$ dans $\mathbb{C}$.
(4) $y'' - 2y' + 2y = e^x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
(5) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.
(6) $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{sh}(x)$.
(7) $y'' + 4y = \sin(x) + \sin(2x)$.
(8) $y'' + y = \cos^3(x)$.

Exercice 10.
Déterminer les solutions de $y'' + 2iy = 0$ valant 1 en 0 et de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 11.
Soit $(E) \quad : \quad (1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3 e^x, \quad x \in]-1, +\infty[$. Dans cet exercice nous allons résoudre cette équation.

1. Montrer l'applicaiton définie sur $]-1, +\infty[$ par $x \mapsto e^x$ est solution de l'équation homogène associée.
2. Soit y un solution de (E) et z définie par $y(x) = z(x)e^x$ (on reconnaît la méthode de la variation de la constante), montrer que y est solution de (E) si seulement si z est solution d'une équation différentielle (E_1) que l'on résoudra.
3. Donner les solutions de (E).