Exercice 4

① En résolvant l'équation homogène et en utilisant la méthode de la variation de la constante on montre que les solutions S_+ (resp S_-) sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$) sont :

$$S_+ = \left\{ x \longmapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{\ln(x^2+1)}{x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_- = \left\{ x \longmapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{\ln(x^2+1)}{x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

② On a l'équivalence suivante :

$$(E)\ xy' + y = \frac{2x}{x^2+1} \iff \begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = \frac{2}{x^2+1} & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \\ y' + \frac{1}{x} y = \frac{2}{x^2+1} & \text{sur } \mathbb{R}_-^* \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

N'oublions pas que y est cherchée dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi y est solution de (E) si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{x} + \frac{\ln(x^2+1)}{x}, & x \in \mathbb{R}_+^* \\ \frac{\mu}{x} + \frac{\ln(x^2+1)}{x}, & x \in \mathbb{R}_-^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Il faut maintenant trouver λ et μ de façon à ce que y soit dérivable en 0.

Rappelons que $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

Ainsi par composition $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

D'où, comme pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times x$

on a $\frac{\ln(1+x^2)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par produit.

De plus $\frac{\lambda}{x}$ et $\frac{\mu}{x}$ n'ont de limite finie en 0

que si $\lambda = \mu = 0$.

Ainsi la fonction y admet une limite et est continue en 0 si et seulement si $\lambda = \mu = 0$.

Il reste à vérifier que y est bien dérivable en 0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ on a alors :

$$\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x} - 0}{x - 0} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Ainsi l'application définie par :

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.