Exercice 3

L'ensemble S_0 de l'equation homogène associée est :

$$S_0 = \left\{ x \longmapsto \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour trouver une solution particulière nous appliquons le principe de superposition. Ainsi on cherche une solution sous la forme

$$y_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax+b$$

où a et b sont deux réels à determiner, de l'equation (E') : $y' - 3y = x$

et une sous la forme

$$y_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto c e^{-x}$$

où c est un réel à determiner pour l'equation

$$(E'') \quad y' - 3y = e^{-x}$$

Après calcul on obtient que l'application

$$y_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

est solution de (E') et que l'application

$$y_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -\frac{1}{4} e^{-x}$$

est solution de (E'')

l'ensemble des solutions de (E) : $y' - 3y = x + e^{-x}$
est donc

$$\boxed{S = \left\{ x \longmapsto -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}e^{-x} + \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}.$$

D'après ce qui précède y est solution de (E)
ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}e^{-x} + \lambda e^{3x}$$

Mais ~~si~~ $y(0) = 2$ ~~on a alors~~ est équivalent à.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \lambda = 2 \iff \lambda = \frac{23}{12}$$

Ainsi y vérifie le pb de Cauchy

$$\begin{cases} y' - 3y = x + e^{-x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

si et seulement si y : ~~est~~ l'application :

$$\begin{array}{l|l} & y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{23}{12}e^{3x} \end{array}$$