

Ex 2

(7) Notons (E_7) l'eq diff sur $]0,1[$

$$(E_7): xy' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$$

Comme pour tout $x \in]0,1[$ $x \neq 0$ (E_7) est équivalente à :

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x(1-x^2)}$$

L'ensemble S_0 des solutions de l'eq homogène associée est :

$$S_0 = \left\{ x \mapsto Lx \frac{1}{x^3}, L \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche une solution particulière de (E_7) par la méthode de la variation de la constante. Ainsi posons y_0 l'application :

$$y_0:]0,1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto L(x)x \frac{1}{x^3}$$

où L est une fonction dérivable à déterminer. L'application y_0 est dérivable et

$$\forall x \in]0,1[\quad y_0'(x) = L'(x)x \frac{1}{x^3} - 3L(x)x \frac{1}{x^4}$$

Ex 2

(7) suite

Ainsi γ_0 est solution de (E_7) si

$$\forall x \in]0,1[\quad \lambda'(x) x \frac{1}{x^3} - 3\lambda(x) x \frac{1}{x^4} + 3x \frac{1}{x} \lambda(x) x \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x(1-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0,1[\quad \lambda'(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

Mais pour tout $x \in]0,1[$ on a :

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x^2-1}{1-x^2} + \frac{1}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x}$$

Ainsi γ_0 est solution de (E_7) ssi

$$\forall x \in]0,1[\quad \lambda'(x) = -1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x}$$

L'application $\lambda :]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -x + \ln(\sqrt{1-x^2})$$

envoie. Ainsi l'ensemble S_7 des solutions de (E_7) est

$$S_7 = \left\{ x \mapsto -\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(\sqrt{1-x^2})}{x^3} + \frac{1}{x^3}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Ex 2

(8) Résolvons (E_2) l'éq diff sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(E_2) : (e^x - 1)y' + e^x y = 1$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $e^x - 1 \neq 0$
alors (E_2) est équivalente à l'éq :

$$y' + \frac{e^x}{e^x - 1} y = \frac{1}{e^x - 1}$$

L'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$x \mapsto \ln(e^x - 1)$ est une primitive de l'appli^c

$x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$ ainsi l'ensemble des solutions

de l'éq homogène associée est :

$$S_0 = \left\{ x \mapsto \lambda x \frac{1}{e^x - 1}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche maintenant une solution particulière de (E_2) par la méthode de la variation de la constante.

On pose ainsi y_0 l'application définie par :

$$y_0 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x) \times \frac{1}{e^x - 1}$$

Ex 2
(3)

où λ est une fonction dérivable à déterminer.
L'application y_0 est donc dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y_0'(x) = \frac{\lambda'(x)}{e^x - 1} + \lambda(x) \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Ainsi y_0 est solution de (E_2) ssi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\lambda'(x)}{e^x - 1} - \lambda(x) \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{e^x}{e^x - 1} \times \frac{\lambda(x)}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\lambda'(x)}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda(x) = 1$$

Ainsi l'application $\lambda: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ convient.
 $x \mapsto 1$

L'ensemble des solutions de (E_2) est donc

$$\boxed{S_2 = \left\{ x \mapsto (1+x) \times \frac{1}{e^x - 1}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$