Exo 2

(3) Notons (E_3) l'éq diff sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$$(E_3) : y' + \tan(x) y = \sin(2x)$$

L'application $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto -\ln(\cos(x))$$

est une primitive de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ainsi l'ensemble S_0 des solution de (E_3) sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est :

$$S_0 = \left\{ x \longmapsto \lambda \cos(x),\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche maintenant une solution particulière de (E_3) par la méthode de la variation de la constante (Attention ici le coefficient devant y' n'est pas constant!).
Notons y_0 l'application :

$$y_0 :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \lambda(x) \cos(x)$$

où λ est une fonction définie et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ à déterminer.

Exo 2

(3) suite

L'application y_0 est donc dérivable et

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad y_0'(x) = \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x)$$

Ainsi y_0 est solution de (E_3) <u>ssi</u>

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\lambda(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \lambda'(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \lambda'(x) = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \lambda'(x) = 2\sin(x)$$

Ainsi l'application $\lambda : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2\sin(x)$

convient. L'ensemble S_3 des solutions de (E_3) est donc

$$\boxed{S_3 = \left\{ x \mapsto (\lambda - 2\sin(x))\cos(x) \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Ex2

(5) Notons (E_5) l'eq diff sur $\mathbb{R}$:

$$(E_5): \quad y' + y = \sin(x)$$

L'ensemble des solutions de l'eq homogène associée est

$$S_0 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cette equa. diff. est à coefficient constant on cherche donc une solution particulière sous la forme :

$$y_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto A\sin(x) + B\cos(x)$$

où A et B sont deux réels à déterminer

L'application y_0 est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y_0'(x) = A\cos(x) - B\sin(x)$$

Ainsi y_0 est solution de (E_5) ssi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A\cos(x) - B\sin(x) + A\sin(x) + B\cos(x) = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad (A+B)\cos(x) + (A-B)\sin(x) = \sin(x)$$

Ainsi si y_0 est solution de (E_5) alors on a pour $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ A-B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ex2

(5) On vérifie que l'application

$$y_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$$

est solution de (E_5).
L'ensemble S_5 des solutions de (E_5) est

$$\boxed{S_5 = \left\{ x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

(6) ~~Noton~~
Notons (E_6) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

(E_6) : $y' - 2xy = sh(x) - 2x\,ch(x)$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$S_0 = \left\{ x \longmapsto \lambda e^{x^2},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Par définition des fonctions sh et ch on a l'équivalence

$$(E_6) \iff y' - 2xy = \frac{1}{2}(1-2x)e^{x} - \frac{1}{2}(1+2x)e^{-x}$$

Nous allons utiliser le principe de superposition pour trouver une solution particulière de (E_6)

Ex 2

(6) Ainsi on va chercher une solution particulière de chaque équation :

(E_6') $\quad y' - 2xy = \frac{1}{2}(1-2x)e^{x}$

(E_6'') $\quad y' - 2xy = -\frac{1}{2}(1+2x)e^{-x}$

Notons que les application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{x} \end{array}$

et $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-x} \end{array}$ sont respectivement solution de (E_6') et (E_6''). Les solution de (E_6) sont

donc

$$\boxed{S_6 = \left\{ x \longmapsto \lambda e^{x^2} + 2\operatorname{ch}(x),\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$