(1) Notons $(E_1)$ l'équation sur $\mathbb{R}$ :

$$(E_1) : \quad y' - 5y = x$$

On notera $S_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et $S_1$ l'ensemble des solutions de $(E_1)$.

D'après le cours on a :

$$S_0 = \left\{ x \longmapsto \lambda e^{5x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche maintenant une solution particulière de $(E_1)$ sous la forme (d'après le cours)

$$y_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax+b$$

où $a$ et $b$ sont deux réels à déterminer.

L'application $y_0$ est alors dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y_0'(x) = a$$

Ainsi $y_0$ est solution de $(E_1)$ ssi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a - 5(ax+b) = x$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad -5ax + a - b = x$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Exo 2

(1) suite

Ainsi l'application $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto -\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$$

est solution de $(E_1)$. On a ainsi

$$\boxed{S_1 = \left\{ x \mapsto -\frac{1}{5}x - \frac{1}{5} + \lambda e^{5x},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

(2) Notons $(E_2)$ l'équation sur $\mathbb{R}$.

$$(E_2) : \quad y' + 4y = 2x e^{-2x}$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$S_0 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-4x},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche maintenant une solution particulière. Comme $-2 \neq -4$ on la cherche sous la forme

$$y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (ax+b)e^{-2x}$$

où $a$ et $b$ sont deux réels à déterminer.

L'application $y_0$ est alors dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y_0'(x) = (-2ax - 2b + a)e^{-2x}$$

Exo2

(2) suite

Ainsi $y_0$ est solution de $(E_2)$ <u>ssi</u>

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (-2ax-2b+a)e^{-2x} + 4(ax+b)e^{-2x} = 2xe^{-2x}$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{-2x} \neq 0$ $y_0$ est solution de $(E_2)$ ssi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2ax + 2b + a = 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b + a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'application $y_0$ définie par :

$$y_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x}$$

est solution de $(E_2)$. Ainsi l'ensemble $S_2$ des solutions de $(E_2)$ est :

$$\boxed{S_2 = \left\{ x \longmapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x} + \lambda e^{-4x}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$