Devoir 4 Correction
exo

$\boxed{\text{Ex 1}}$ Notons que $z=0$ n'est pas solution de l'equation (E) : $(z+1)^n = z^n$ Ainsi on a les equivalences :

$$(E) \iff \left(\frac{z+1}{z}\right)^n = 1 \iff \begin{cases} Z = \left(\frac{z+1}{z}\right)^n \\ Z^n = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Z = \frac{z+1}{z} \\ \exists k \in [\![0, n-1]\!], \ Z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{cases}$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$

• si $k=0$ alors $Z=1$ et $\frac{z+1}{z} = 1$

Ainsi $z+1 = z$ d'où $0=1$, pour $k=0$ l'equation $\frac{z+1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ n'admet pas de solut°.

• si $k \neq 0$ on a alors les equivalences :

$$\frac{z+1}{z} = e^{\frac{2i\pi k}{n}} \iff z\left(e^{\frac{2i\pi k}{n}} - 1\right) = 1$$

$$\iff z = \frac{1}{e^{\frac{2i\pi k}{n}} - 1} \qquad \left(e^{\frac{2i\pi k}{n}} \neq 1\right)$$

$$\iff z = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)} e^{-i\pi\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2}\right)} \qquad \text{(angle moitié)}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \times e^{-i\pi\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{2}\right)} \ , \ k \in [\![1, n-1]\!] \right\}}$$

Ex 2 Soit $x \in \mathbb{R}$

(1) Notons que $\cos 5x = \mathrm{Re}\left(e^{i5x}\right)$

Or d'après la formule de Moivre on a :

$$e^{i5x} = \left(e^{ix}\right)^5 = (\cos x + i\sin x)^5$$

$$= \cos^5 x + 5i\cos^4 x \sin x + -10\cos^3 x \sin^2 x$$
$$-i10\cos^2 x \sin^3 x + 5\cos x \times \sin^4 x + i\sin^5 x$$

La dernière ligne est obtenue grâce au binôme de Newton. On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$$

Par ailleurs pour tout $x \in \mathbb{R}$ ~~sin~~ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

D'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x}$$

(2) En appliquant à $x = \frac{\pi}{10}$ l'expression trouvée à la question précédente on a :

$$0 = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{10}\left(16\left(\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^2 - 20\cos^2\frac{\pi}{10} + 5\right)$$

Or $\cos\frac{\pi}{10} \neq 0$ donc on a bien

$$\boxed{16\left(\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^2 - 20\cos^2\frac{\pi}{10} + 5 = 0}$$

(3) On remarque tout d'abord que $\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{10}\right)$
Ainsi d'après les formules de duplication :

$$\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{10} - 1$$

Or on a vu à la question précédente que $\cos^2\frac{\pi}{10}$ était racine du trinôme $x \longmapsto 16x^2 - 20x + 5$.
Mais en calculant les racines de ce trinôme (calcul du discriminant...) on obtient qu'il admet 2 racines distinctes :

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

D'où

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{5+\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{ou} \quad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

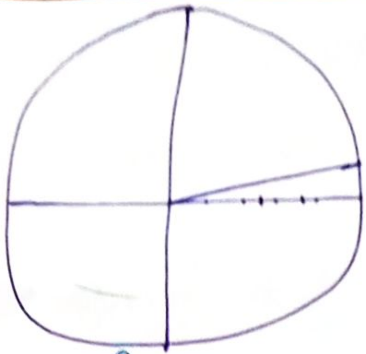
De plus $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ car $\frac{\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

et comme $4 < 5 < 9$ alors $2 < \sqrt{5} < 3$

Ainsi $1-\sqrt{5} < 0$. On a donc bien :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

(3)



(4) On a l'équivalence :

$$(E_1): z^6-(4+3i)z^3+(8i-2)=0 \iff \begin{cases} Z=z^3 \\ Z^2-(4+3i)Z+(8i-2)=0 \end{cases}$$

Ainsi d'après la question précédente :

$$(E_1) \iff \begin{cases} Z=z^3 \\ Z=4+i \text{ ou } Z=2i \end{cases} \iff \begin{cases} z^3=Z \\ Z=\sqrt{17}e^{i\theta_1} \quad Z=2e^{i\pi/2} \end{cases}$$

D'où, l'ensemble des solutions S de (E) est :

$$S=\left\{\sqrt{17}e^{i\theta_1}, \sqrt{17}je^{i\theta_1}, \sqrt{17}j^2e^{i\theta_1}, 2e^{i\pi/2}, 2je^{i\pi/2}, 2j^2e^{i\pi/2}\right\}$$

(5) On remarque que (E_2) est l'équation conjuguée de (E_1), le produit et la somme de complexes conjugués étant le conjugué de la somme et du produit de ces complexes, les solutions de (E_2) sont les conjugués des solutions de (E_1)

Exercice 3

① Soit $z = a+ib$ une inconnue de $\mathbb{C}$ on a les equivalen

$$z^2 = 15-8i \iff \begin{cases} z^2 = 15-8i \\ |z|^2 = |15-8i| \end{cases} \iff \begin{cases} a^2-b^2 = 15 \\ +2ab = -8 \\ a^2+b^2 = 17 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 1 \\ 2ab = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4 \text{ et } b = 1 \\ \text{ou } a = -4 \text{ et } b = -1 \end{cases}$$

Ainsi les racines carrées de $15-8i$ sont

$-4+i$ et $+4-i$

② Le calcul du discriminant Δ du trinôme

$$z \longmapsto z^2 - (4+3i)z + (8i-2)$$

donne $\Delta = 15-8i$ ainsi les solutions de l'eq

$$(E) \quad z^2 - (4+3i)z + (8i-2) = 0$$

sont $\boxed{z_1 = 4 + i \qquad z_2 = 2i}$

③ On a $|z_2| = 2$ et $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, et par ailleurs

$|z_1| = \sqrt{17}$ d'où $z_1 = \sqrt{17}\left(\frac{4}{17}\sqrt{17} + \frac{\sqrt{17}}{17} i\right)$

On note $\theta_1 \in]-\pi, \pi[$ tq $\cos\theta_1 = \frac{4}{\sqrt{17}}$ et $\sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}$

Notons que comme $16 < 17 < 25$ et comme l'application $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ on a :

$4 < \sqrt{17} < 5$ D'où

$$\frac{4}{5} < \frac{4}{\sqrt{17}} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{17}} < \frac{1}{4}$$

D'où la représentation de θ_1 sur le cercle trigonométrique:

Exercice 5

① On note que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

Ainsi l'application f_1 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2,3\}$

On se place sur l'intervalle $]3,+\infty[$

On a, pour tout $x \in]3,+\infty[$ $\dfrac{1}{x^2-5x+6} = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{-1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$

Ainsi l'application

$$F_1 :]3,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)$$

est une primitive de f_1 sur $]3,+\infty[$.

③ Le discriminant du trinôme $x \longmapsto x^2+x+1$ étant négatif l'application f_3 est définie sur $\mathbb{R}$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

Ainsi l'application F_2 :

$$F_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

est une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$

② L'application f_2 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

et $F_2 :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto -\dfrac{1}{(x+1)}$ est une primitive de f_2 sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a

$$\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Considérons l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x+\sqrt{1+x^2}$$

Cette application est dérivable comme composée et somme d'applications dérivables et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)}$$

L'application définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est donc une primitive de ~~f~~ f sur $\mathbb{R}$

Exercice 7

① Sur $\mathbb{R}_+^*$ l'application $x \longmapsto -\frac{1}{3}\frac{1}{(\ln(x))^3}$ est une primitive ~~de~~ de $x \longmapsto \frac{1}{x(\ln(x))^4}$

② L'application $x \mapsto \sqrt{e^x - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

on a ainsi
$$dt = \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$$

Par ailleurs on a $\cancel{\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}}$ $\sqrt{e^x-1} = t \iff t^2+1 = e^x$

Soit $u \in]1,+\infty[$ on a alors en procédant au changement de variables $t = \sqrt{e^x - 1}$

$$\int_2^u \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int_2^u \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,e^{-x}\,dx = \int_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{e^u-1}} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \Big[\arctan t\Big]_{\sqrt{u^2-1}}^{\sqrt{e^u-1}}$$

Ainsi l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{e^u - 1}\right)$$
est une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$