Lycée Condorcet
PCSI

Novembre 2023

Logique, ensembles

Table des matières

1 Introduction à la logique

1.1 Logique propositionnelle

Dans cette sous-section, on s'intéresse aux *formules propositionelles*, c'est à dire aux énoncés qui s'obtiennent sans quantifications, uniquement à l'aide des connecteurs logiques et de *variables propositionnelles, P, Q, R, S, ...* dénotant des énoncés mathématiques.
Bien sûr, en mathématiques, les énoncés que l'on manipule ne sont quasiment jamais des formules propositionnelles. Par contre si une formule propositionnelle est vraie alors tout énoncé obtenu en substituant les variables propositionnelles par des énoncés mathématiques sera également vrai.
Les connecteurs sont la négation, 'et' , 'ou', 'implique', 'équivaut'. Ces mots ont un sens en français mais pour définir leur sens sur des variables propositionnelles il est nécessaire d'utiliser les tables de vérités.

1.1.1 Tables de vérité

Étant donnée une formule propositionnelle $\mathcal{F}$, on appelle *table de vérité de* $\mathcal{F}$ un tableau donnant toutes les valeurs de vérité possibles de la formule en fonction des valeurs de vérité de ses variables.

Définition 1.

Soit P et Q deux assertions.
On définit les connecteurs 'et' et 'ou' avec les tables suivantes :

- La conjonction 'et', notée $P \wedge Q$.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- La disjonction 'ou', notée $P \vee Q$.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Définition 2.

Soit P et Q deux assertions.
On définit les connecteurs 'implique' et 'équivaut' avec les tables suivantes :

- La conjonction 'implique', notée $P \Longrightarrow Q$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- La disjonction 'equivaut', notée $P \Longleftrightarrow Q$.

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Définition 3.

Soit P une assertion.
On définit la négation notée $\neg P$

P	$\neg P$
V	F
F	V

Ces tables nous permettent de déduire la table de vérité de toutes les formules propositionnelles puisqu'une formule propositionnelle s'écrit toutjours à l'aide des seuls connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Exemple 1

Soient P et Q deux assertions.
Ècrire la table de vérité de la formule propositionelle :

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$$

1.1.2 Propriétés des connecteurs

On considère que deux formules propositionnelles sont *égales* lorsqu'elles ont même table de vérité. C'est ce qui va nous permettre de démontrer toutes les proppriétés suivantes.

Proposition 4.

Soient P et Q deux assertions.

$$(P \Longrightarrow Q) = (\neg P \vee Q)$$

Proposition 5.

Soient P et Q et R trois assertions.

1. $P \wedge P = P$;
2. $P \vee P = P$;
3. $P \wedge Q = Q \wedge P$;
4. $P \vee Q = Q \vee P$;
5. $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$;
6. $P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$;

Proposition 6 (Distributivités des connecteurs logiques)**.**

Soient P et Q et R trois assertions.

1. $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;
2. $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Proposition 7 (Involutivité de la négation)**.**

On a :

$$\neg(\neg P) = P.$$

Proposition 8 (Lois de Morgan propositionnelles)**.**

Soient P et Q deux assertions.

1. $\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
2. $\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$.

1.1.3 Applications

Ces dernières propositions nous permettent de simplifier les énoncés mais les thèorèmes suivants nous donnent deux techniques de démonstration : la contraposition et le raisonnement par l'absurde.

Théorème 9 (Théorème de contraposition.)**.**

Soient P et Q deux assertions.
On a $(P \Rightarrow Q) = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Théorème 10.

Soit P une assertion.

1. On a $(\neg P \Rightarrow f) = P$.
2. On a $(P \Rightarrow f) = \neg P$.

Ce dernier résultat nous indique comment *utiliser* les théorèmes souvent écrits sous forme d'implication.

Proposition 11.

Soient P et Q deux assertions.

$$\text{Si} \qquad (P \Longrightarrow Q) \text{ et } P \text{ sont vraies,} \qquad \text{alors } Q \text{ est vraie.}$$

Proposition 12.

Soient P et Q deux assertions.

$$\neg(P \Rightarrow Q) = P \text{ et } (\neg Q).$$

Proposition 13.

Soient P Q et R des assertions.

$$P \Longleftrightarrow Q \quad = \quad (P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P).$$

1.2 Énoncés quantifiés

Soit E un ensemble.
On se donne $\mathcal{P}(X)$ un prédicat sur E, c'est à dire une phrase utilisant la variable $X \in E$. Lorsque dans le prédicat, on substitue à X un élément de l'ensemble E, on obtient une assertion $\mathcal{P}(x)$. Par exemple le prédicat "X est pair" permet, lorsqu'on subsitue des entiers à X de former les assertions "3 est pair" et "3 est pair".
On rappelle les notations utilisées depuis le début de l'année :

L'assertion "pour tout élément x de E, l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie" s'écrit

$$\forall x \in E \ \ \mathcal{P}(x).$$

L'assertion "il existe un élément de E, disons x, telle que l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie" s'écrit quant à elle

$$\exists x \in E \ \ \mathcal{P}(x)$$

IL doit être clair que cette assertion signifie qu'il existe au moins un élément de E qui vérifie $\mathcal{P}$.
L'assertion "il existe un unique élément de E, que l'on note x, telle que l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie" se note :

$$\exists! x \in \quad \mathcal{P}(x)$$

On pourrait s'étonner qu'il n'y ait pas de quantificateur pour l'énoncé "il existe au plus un élément de E vérifiant $\mathcal{P}$". C'est qu'en fait il peut s'écrire de la façon suivante :

$$\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, \quad \big(\mathcal{P}(x_1) \wedge \mathcal{P}(x_2)\big) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Un prédicat peut dépendre de plusieurs variables et on peut être amené à utiliser plusieurs quantificateurs (comme on vient d'ailleurs de le faire).
Soient E et F deux ensembleset $\mathcal{P}(X,Y)$ un prédicat où X prend ses valeurs dans E et Y dans F. Signalons les synonymies :

$$\begin{array}{ccc} \forall x \in E \ \ (\forall y \in F \ \ \mathcal{P}(x,y)) & = & \forall y \in F \ \ (\forall x \in E \ \ \mathcal{P}(x,y)) \\ \exists x \in E \ \ (\exists y \in F \ \ \mathcal{P}(x,y)) & = & \exists y \in F \ \ (\exists x \in E \ \ \mathcal{P}(x,y)) \end{array}$$

En revanche, Les assertions suivantes ne sont pas synonymes !

$$\forall x \in E \ \ (\exists y \in F \ \ \mathcal{P}(x,y)) \quad \text{et} \quad \exists y \in F \ \ (\forall x \in E \ \ \mathcal{P}(x,y))$$

Proposition 14.

Soit $\mathcal{P}(X)$ un prédicat sur un ensemble E. On a les synonymies

$$\begin{array}{ccc} \neg(\forall x \in E \ \ \mathcal{P}(x)) & = & \exists x \in E \ \ \neg\mathcal{P}(x) \\ \neg(\exists x \in E \ \ \mathcal{P}(x)) & = & \forall x \in E \ \ \neg\mathcal{P}(x) \end{array}$$

2 Ensembles, parties d'un ensemble

2.1 Notion, notations

Définition 15 (Intuitive mais non cohérente)**.**

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments. On note $x \in E$ lorsque x est un élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire.
On pose de plus qu'il existe un ensemble vide et on le note $\emptyset$.

Cette définition, très intuitive, mène, en fait, au paradoxe de Russel (*Principles of mathematics* Cambridge university press (1903) - pages 101 à 105) ou paradoxe du barbier. Ce n'est donc pas une définition intéressante. La définition utilisée par les mathématiciens n'est pas au programme et nous mènerait bien trop loin.

• Remarque
Pour tout objet x, l'assertion $x \in \emptyset$ est fausse.

• Notations

- Le symbole $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, c'est à dire l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
- Le symbole $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs, c'est à dire l'ensemble de tous les entiers.
- Le symbole $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire l'ensemble des nombres de la forme $\dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$.
- Le symbole $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Exemple 2

L'ensemble $\{-12, 25, 102\}$ est l'ensemble contenant -12, 25 et 102. Dans cette notation avec accolades, l'ordre des éléments ne compte pas ; l'éventuelle répétition des éléments ne compte pas non plus. Ainsi :

$$\{-12, 25, 102\} = \{102, -12, 25\} = \{25, 102, -12\} = \{25, 25, -12, 102\} = \dots$$

Définition 16.

Une manière de définir un ensemble est de donner tous les éléments de cet ensemble. On dit qu'on définit cet ensemble en **extension**.

• **Remarque**
On peut définir un ensemble constituer un nombre infini d'éléments.

• **Exemples**

2.2 Inclusion, égalité

Définition 17.

Soient E et F deux ensembles.

1. On dit que E est **une partie** de F (ou que E est un **sous-ensemble** de F) si tout élément de E est un élément de F.
$$\forall x, \quad x \in E \quad \Rightarrow \quad x \in F$$
Dans ce cas, on écrit $E \subset F$, ce qui se lit « E est inclus dans F ».
2. On dit que E et F sont **égaux** si $E \subset F$ et $F \subset E$.
$$\forall x, \quad x \in E \quad \Longleftrightarrow \quad x \in F$$

Exemple 3

1. L'ensemble $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{N}$ mais les deux ensembles ne sont pas égaux.
2. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est inclus dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ mais les deux ensembles ne sont pas égaux.

Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. On peut bien sûr se demander si $G \subset F$ ou $F \subset G$ mais contrairement aux réels et à la relation d'ordre $\leq$, on peut très bien n'avoir ni $G \subset F$ ni $F \subset G$.

• **Dessin**

Méthode.

Soient E et F deux ensembles.

1. Pour démontrer que F est inclus dans E. On fixera un élément quelconque de F et on montrera qu'il appartient à E.

2. Pour démontrer que $F = E$.
   — On pourra montrer que $F \subset E$ et $E \subset F$.
   — On pourra aussi raisonner par équivalence.

3. Pour pour montrer que $F \subset E$ mais F et E ne sont pas égaux. On montrera que $F \subset E$ et qu'il existe un élément de E n'appartenant pas à F.

Définition 18.

Soit E un ensemble. On peut parfois décrire une partie de E comme l'ensemble des éléments de E qui vérifient une certaine propriété.
Supposons que $\mathscr{P}$ soit une propriété suceptible d'être vérifiée par les éléments de E. Alors la notation

$$F = \left\{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathscr{P}\right\}$$

désigne l'ensemble des éléments de E vérifiant $\mathscr{P}$. On le note aussi $\left\{x \in E,\ x \text{ vérifie } \mathscr{P}\right\}$.
On dit que F est défini en **compréhension**.

• **Remarque** : Au cours de l'année nous verrons d'autres méthode pour montrer que deux ensembles sont égaux.

Exemple 4

1. On a : $\mathbb{N} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 0\}$.
2. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $n \leq m$. La notation $[\![n, m]\!]$ désigne l'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} \mid n \leq k \leq m\}$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ est noté $[a, b]$. C'est l'**intervalle fermé** (ou : **segment**) de bornes a et b.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ est noté $]a, b[$. C'est l'**intervalle ouvert** de bornes a et b.
5. Notations $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_-^*$.
6. L'ensemble $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ peut être aussi défini par $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$.

Méthode.

Soit $F = \left\{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathscr{P}\right\}$ un ensemble défini comme ci-dessus. Un élément y de E appartient à F si et seulement s'il vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

Exemple 5

1. Soit $F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + x \geq 0\right\}$. Vérifier si 3 et $0,5$ appartiennent à cet ensemble.
   Décrire cet ensemble.
2. Soit $G = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 6k\right\}$, vérifier si 42, 31 appartiennent à cet ensemble.
3. Soient a, b et c trois nombres réels. Notons $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\right\}$. Décrire E (attention, cela dépend

de a, b, c).

4. Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux propriétés portant sur des éléments d'un ensemble E, que signifie pour $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ que :
$$\{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathscr{P}\} \subset \{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathscr{P}'\}$$
et que
$$\{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathscr{P}\} = \{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathscr{P}'\}$$

2.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 19.

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 6

Décrire $\mathcal{P}(E)$ dans le cas où $E = \{a, b\}$.

• **Remarques**

— Si l'ensemble E contient un nombre fini d'éléments l'existence de $\mathscr{P}(E)$ est claire, il suffit de le donner en extension. Par contre si E est de cardinal inifini l'existence de $\mathscr{P}(E)$ est un axiome de la théorie des ensembles. L'existence de $\mathscr{P}(E)$ ne se démontre donc pas !

— $\emptyset$ et E sont toujours des parties de E. Avec les notations vues jusqu'ici, on peut ainsi écrire $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ (c'est à dire $\emptyset \subset E$), et $E \in \mathcal{P}(E)$ (c'est à dire $E \subset E$).

— Si A est un ensemble, dire que $A \subset E$ équivaut à dire que $A \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple 7

1. Donner $\mathcal{P}\big(\{1\}\big)$.
2. Donner $\mathcal{P}(\emptyset)$.
3. (plus dur) Donner $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\emptyset)\big)$ puis $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\emptyset)\big)\Big)$.

Proposition 20.

Soit E un ensemble. On a

1. $\forall A \in \mathscr{P}(E) \quad A \subset A \quad$ (réflexivité)
2. $\forall (A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \quad (A \subset B \text{ et } B \subset A) \Rightarrow A = B \quad$ (antisymétrie)
3. $\forall (A, B, C) \in (\mathscr{P}(E))^3 \quad (A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C \quad$ (transitivité)

2.4 Complémentaire d'une partie d'un ensemble

Définition 21.

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E.
Le **complémentaire** de A dans E est la partie de E notée $\overline{A}$ (ou $\complement_E A$ s'il y a un risque d'ambiguïté), définie par
$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$
C'est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

- **Dessin**

Exemple 8

1. Donner le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $\{0\}$.
2. Donner dans $\mathbb{R}$ le complémentaire de $F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + x \geq 0\right\}$.
3. Donner le complémentaire dans $\mathbb{N}$ de l'ensemble $\left\{3n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
4. Donner le complémentaire dans $\mathbb{N}$ de l'ensemble des nombres premiers.
5. Si $\mathscr{P}$ est une propriété qui porte sur un ensemble E. Quel est le complémentaire dans E de l'ensemble

$$\left\{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathscr{P}\right\}.$$

Proposition 22.

Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E.

1. On a $\overline{\overline{A}} = A$.
2. Si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.

- **Dessin**

2.5 Intersection, réunion, différence

Soit E un ensemble.

Définition 23.

Soient A et B deux parties de E.
L'**intersection** de A et B est la partie de E notée $A \cap B$, définie par

$$A \cap B = \left\{x \in E \;\middle|\; x \in A \text{ et } x \in B\right\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui sont à la fois dans A et dans B.

Définition 24.

Soient A et B deux parties de E.
Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les parties A et B sont **disjointes**.

- **Dessins.**

Exemple 9

1. Soient E et F les deux sous ensembles de $\mathbb{N}$: $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$, $F = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k\}$, donner l'intersection de ces deux ensembles.
2. Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux propriétés portant sur des éléments d'un ensemble E, décrire l'intersection :

$$\{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathscr{P}\} \cap \{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathscr{P}'\}$$

Proposition 25.

Soient A, B et C trois parties de E.

1. $A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. $(A \cap B) \subset A$, $(A \cap B) \subset B$.
4. Si $A \subset C$, alors $(A \cap B) \subset (C \cap B)$.
5. On a l'équivalence : $A \subset B$ si et seulement si $(A \cap B) = A$.
6. $(A \cap A) = A$.
7. Si $A \subset B$ et $A \subset C$, alors $A \subset (B \cap C)$.

Définition 26.

Soient A et B deux parties de E.
La **réunion** de A et B est la partie de E notée $A \cup B$, définie par

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B.

- **Dessins.**

Exemple 10

1. Décrire la réunion :
$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1\}$$
2. Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux propriétés portant sur des éléments d'un ensemble E, décrire la réunion :
$$\{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathscr{P}\} \cup \{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathscr{P}'\}$$

Proposition 27.

Soient A, B et C trois parties de E.

1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $(A \cup A) = A$.
3. Si $A \subset C$ et $B \subset C$, alors $(A \cup B) \subset C$.
4. $\big(A \cup B\big) \cup C = A \cup \big(B \cup C\big)$.
5. $A \subset (A \cup B)$, $B \subset (A \cup B)$.
6. Si $A \subset C$, alors $(A \cup B) \subset (C \cup B)$.
7. On a l'équivalence : $A \subset B$ si et seulement si $(A \cup B) = B$.

Proposition 28.

Soient A, B et C trois parties de E.

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$)
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$)

Définition 29.

Soit E un ensemble. On appelle **partition** de E une famille $(F_i)_{i \in I}$ de parties de E telle que

— $\forall i \in I \quad F_i \neq \emptyset$ (les parties sont non vides).

— $E = \bigcup_{i \in I} F_i$ (l'ensemble E est réunion des parties).

— $\forall (i,j) \in I^2 \quad i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$ (les parties sont deux à deux disjointes).

Définition 30.

Soient A et B deux parties de E.
La **différence** de A et B est la partie de E notée $A \setminus B$, définie par
$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$
C'est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et qui ne sont pas dans B, autrement dit, l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B. On a
$$A \setminus B \ = \ A \cap \overline{B}.$$

- **Dessins.**

2.6 Produit cartésien

- Soient E et F deux ensembles. On peut former des **couples** (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$, de sorte que l'on ait : pour tous $a \in E$, $a' \in E$, $b \in E$, $b' \in E$,

$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array} \right. .$$

Définition 31.

1. Le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ n ensembles. On appelle produit cartésien de $E_1, \ldots, E_n$ et on le note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}$$

   Les éléments de cet ensemble sont appelés **n-uplets**.

- **Dessins.**

Proposition 32.

Soit A une partie de E. Soit B une partie de F. Alors $(A \times B) \subset (E \times F)$.

- **Exemples** : $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^p$.