Lycée Condorcet
PCSI

Janvier 2024

Applications

Table des matières

1 Définitions

Soient E et F deux ensembles.

Définition 1.

Soient E et F deux ensembles. On dit que f est une **application** (ou fonction) si à tout élément x de E, f associe un unique élément de F, appelé **image** de x par f noté $f(x)$. L'ensemble E est **l'ensemble de départ** ou ensemble de définition de f et F est **l'ensemble d'arrivée** de f. On note

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

Si y est un élément de F, on dit que $x \in E$ est un **antécédent** de y par f si $y = f(x)$.
On appelle **graphe** de l'application f le sous-ensemble de $E \times F$ défini par :

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$$

- **Dessins**

Exemple 1

1. Applications constantes,
2. Application identité,
3. Fonctions indicatrices d'une partie.
4. L'application qui a une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ associe sa fonction dérivée.

Proposition 2.

Deux applications sont égales si elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée et si, pour tout $x \in E$, on a :

$$f(x) = g(x)$$

Définition 3.

Soit I un ensemble. Soit E un ensemble.
Se donner une **famille** $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E, indexée par I, c'est se donner, pour chaque $i \in I$, un élément $x_i \in E$ (cela revient à se donner une application de I dans E).
Ainsi une suite réelle peut être vue comme une fonction de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.1 Restriction, prolongement

Définition 4.

Soit f une application de E dans F.

1. Si $E_1 \subset E$ alors on appelle restriction de f à E_1 l'application notée $f_{|_{E_1}}$ et définie par :

$$\begin{array}{rccc} f_{|_{E_1}}: & E_1 & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

2. Si $E_2 \supset E$ et $F_2 \supset F$, alors toute application g définie de E_2 à valeurs dans F_2 et telle que $g_{|_E} = f$ est un prolongement de f à E_2.

1.2 Composition

Soient E, F et G trois ensembles.

Définition 5.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle **composée** de f et g (dans cet ordre) l'application notée $g \circ f$ définie par : $\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}.$$

- **Dessins.**

Exemple 2

1. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = x \times e^x$. La fonction $f \circ g$ est-elle définie ? Si oui la donner. Même question pour $g \circ f$.
2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = x \ln x$. La fonction $h \circ f$ est-elle définie ? Si non à quel ensemble de $\mathbb{R}$ faut-il restreindre f pour qu'elle soit définie ?
3. Soit f une applicaiton de E dans E. Remarquer que $Id_E \circ f = f = f \circ Id_E$.

- **Remarque**. Même quand $g \circ f$ est définie, l'application $f \circ g$ n'a aucune raison d'être définie. Même si $g \circ f$ et $f \circ g$ sont toutes les deux définies, elles n'ont pas en général le même ensemble de définition. Même quand c'est le cas, elles ne sont en général pas égales.

Proposition 6.

Soient E, F, G, H quatre ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$, $h : G \longrightarrow H$ des applications.
On a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Cette application est notée $h \circ g \circ f$.

1.3 Fonction réciproque

Définition 7.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit qu'une application $g : F \longrightarrow E$ est une réciproque de f si elle vérifie :

$$g \circ f = Id_E, \text{ et } f \circ g = Id_F.$$

Proposition 8.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
S'il existe une application réciproque de f alors elle est unique.
Dans ce cas on la note f^{-1}.

2 Images directes, images réciproques

2.1 Image directe

Définition 9.

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de E. On appelle **image** (directe) de A par f, et on note $f(A)$ l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in Ay = f(x)\}$$

Lorsque c'est l'image de E tout entier que l'on considère, on peut noter :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E)$$

Remarque. Si A est une partie de E, $f(A)$ est une partie de F !

Proposition 10.

Soit $f : E \to F$ une application. Soient A et B deux parties de E. On a

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \text{ et } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Remarque L'inclusion réciproque pour l'image d'une intersection, n'est pas vraie en général. Par exemple, considérons l'application $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Considérons $A = [1, +\infty[$ et $B =]-\infty, -1]$. On a $A \cap B = \emptyset$, de sorte que $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$. Cependant $f(A) = f(B) = [1, +\infty[$, de sorte que $f(A) \cap f(B) = [1, +\infty[$.

2.2 Image réciproque

Définition 11.

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de F. On appelle **image réciproque** de A par f, et on note $f^{-1}(A)$ l'ensemble

$$f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\}.$$

3 Injection, surjection, bijection

3.1 Injection

Définition 12.

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **injective** (ou : est une **injection**) si :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

(c'est à dire : tout élément de F admet au plus un antécédent par f).

Proposition 13.

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
L'application f est injective si et seulement si :

1. $\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.
2. Tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent par f dans E.
3. Pour tout $c \in F$, l'équation $f(x) = c$ d'inconnue x admet au plus une solution dans E.

- **Dessins.**

- **Remarque**

Pour montrer qu'une apllication $f : E \to F$ n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments x et x' de E tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.

Exemple 3

1. Soit E un ensemble, l'applications Id_E est injective.
2. L'appliaction f définie par : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective, mais sa restriction : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ l'est.
3. L'application g définie par : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$ est injective.

Proposition 14.

Une application strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est injective.

Exemple 4

Soi f l'application définie par :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \left]\frac{1}{2},1\right] \\ x & \longmapsto & \dfrac{1+x}{1+2x} \end{array}$$

Montrer que f est injective

Proposition 15.

Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

Proposition 16.

Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

3.2 Surjection

Définition 17.

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **surjective** (ou est une **surjection**) si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)$$

Proposition 18.

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
L'application f est bijective si et seulement si :

1. Tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au moins un antécédent par f dans E.
2. Pour tout $c \in F$, l'équation $f(x) = c$ d'inconnue x admet au moins une solution dans E.

- **Dessins**

- **Remarque**

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément de F qui n'admet pas d'antécédent par f.

Exemple 5

1. Soit E un ensemble, l'application Id_E est surjective.
2. L'appliaction f définie par : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas surjective, mais l'application : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ l'est.
3. L'application g définie par : $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$ n'est pas surjective.

Proposition 19.

Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

• **Remarque**
Le théorème des valeurs intermédiaires, que nous reverrons plus tard, permet dans le cas de la fonctionf_1 définie à l'exemple 13 de démontrer que la fonction f_1 est surjective.

Proposition 20.

Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

3.3 Bijection

Définition 21.

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **bijective** (ou : est une **bijection**) si elle est injective et surjective :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E,\ y = f(x)$$

Proposition 22.

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
L'application f est bijective si et seulement si :

1. Tout élément de l'ensemble d'arrivée F a exactement un antécédent par f dans E.
2. Pour tout $c \in F$, l'équation $f(x) = c$ d'inconnue x admet exactements une solution dans E.

• **Dessins.**

Proposition 23.

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On a l'équivalence :

f est bijective si et seulement si elle admet une application réciproque.

Dans le cas ou elle existe l'application f^{-1} est alors elle aussi bijective, on l'appelle la **bijection réciproque**.

Exemple 6

Montrer que la fonction f_1 définie à l'exemple 13 admet une bijection réciproque.
Expliciter f_1^{-1}.