Lycée Condorcet Novembre 2023
PCSI

Logique, ensembles

On rappelle qu'on note $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Logique propositionnelle

Exercice 1. *Valeurs de vérité*

Dans cet exercice, P, Q et R désignent des propositions mathématiques. Pour chaque question, on pourra indifféremment dresser la table de vérité, ou utiliser des propositions du cours pour réécrire les énoncés, ou privilégier une approche sémantique.

1. Montrer que $\Leftrightarrow$ est associative.
2. Considérons la proposition suivante : $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$.
   Est-elle toujours vraie, toujours fausse, ou sa valeur de vérité dépend-elle des valeurs de vérité de P, Q et R ?

Exercice 2. *Négation*

Dans cet exercice, $P, Q,$ et R désignent des propositions mathématiques. Nier les propositions suivantes :

1. $(P \wedge Q) \Rightarrow R$
2. $P \wedge (Q \Rightarrow R)$
3. $P \Leftrightarrow (Q \wedge P)$

Premier ordre

Exercice 3. *Version*

Pour chacune des propositions suivantes, écrivez la négation de la proposition, traduisez la proposition en français correct, et démontrer la proposition ou sa négation si l'une des deux est démontrable.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n < m$
2. $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n < m$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, -x \leq x$

Exercice 4. *Thème*

Écrire l'énoncé suivant à l'aide du formalisme symbolique, puis le démontrer :
« le successeur du carré d'un entier strictement positif n'est jamais le carré d'un entier naturel ».

Second ordre

Exercice 5. *Version*

Pour chacune des propositions suivantes, écrivez la négation de la proposition, traduisez la proposition en français correct, et démontrer la proposition ou sa négation si l'une des deux est démontrable.

1. $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = y$
2. $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$
3. $\forall P \subset \mathbb{N}, [0 \in P \wedge (\forall x \in \mathbb{R}, x \in P \Rightarrow x + 1 \in P)] \Rightarrow P = \mathbb{N}$

Exercice 6. *Thème*

Écrire l'énoncé suivant à l'aide du formalisme symbolique, puis le démontrer :
« il existe des suites à termes positifs dont la limite en l'infini est nulle, mais qui ne sont pas décroissantes, même à partir d'un certain rang ».

Exégèses

Exercice 7. *Fonctions dans le programme de* $1^{ere}S$ *et TS.*

1. Dans le programme de 1^{ere}S, on trouve la compétence exigible suivante : « Démontrer que la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$. ».
   (a) Traduire l'énoncé à démontrer en formalisme symbolique (on s'autorise le symbole $\sqrt{\ }$).
   (b) Le démontrer, si possible sans recourir au théorème sur le signe de la dérivée.
2. Dans le programme de TS, on trouve le commentaire suivant : « La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)$ verifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle. ».
   (a) Traduire cet énoncé en formalisme symbolique.
   (b) Le démontrer.

   Si ce n'est pas clair : la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle **n'est pas** *la relation différentielle de l'exponentielle ! C'est l'autre truc.*

Exercice 8. *Limites dans le programme de TS.*

1. Dans le programme de TS, on trouve la phrase suivante : « Pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : "tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang". ».
   (a) Traduire ceci en formalisme symbolique.
   (b) En utilisant cette définition, montrer qu'une suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme 1 a pour limite $+\infty$. On pourra utiliser les propriétés connues de la fonction ln.
2. Dans le programme de TS, on trouve la phrase suivante : « Pour exprimer que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : "tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang". ».
   (a) Traduire ceci en formalisme symbolique.
   (b) En utilisant cette définition, montrer qu'une suite géométrique de raison $0 < q < 1$ et de premier terme 1 a pour limite 0. On pourra toujours utiliser les propriétés connues de la fonction ln.

Exercice 9. *Égalités ensemblistes*

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

1. Montrer qu'on a ${}^cA \setminus {}^cB = B \setminus A$.
2. Montrer qu'on a $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.
3. Montrer qu'on a $A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \subset C$.
4. Montrer qu'on a $A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow A \cup {}^cB = A \cup {}^cC$.

Exercice 10.
Montrer, en utilisant les lois de Morgan et les propriétés des opérations $\cap$ et $\cup$ que

$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C) \quad \text{et} \quad A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$$

Exercice 11.
Soit E un ensemble. Pour tout A, B partie de E on définit la différence symétrique de A et B notée $A \Delta B$ par $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

1. Exprimer $A \Delta B$ à l'aide des parties A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$ et les opérations $\cap$, $\cup$ uniquement.
2. Déterminer pour tout $A \subset E$, les parties $A \Delta A$, $\emptyset \Delta A$, $E \Delta A$, $A \Delta \overline{A}$.
3. Montrer que $\cap$ se distribue sur Δ. Est-ce le cas sur $\cup$?
4. Montrer que l'opération Δ est commutative et associative.
5. Montrer qu'on a $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 12.
Soit E un ensemble, n un entier naturel non nul et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles de E tels que

$$\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n = E$$

On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = A_k \backslash A_{k-1}$. Montrer que $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ est une partition de E.

Produit cartésien. Ensemble des parties.

Exercice 13. *Comparaisons d'ensembles*
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Comparer $\mathcal{P}(A \cap B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Comparer $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
3. Comparer $\mathcal{P}(A \times B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Remarque : lorsqu'on demande de comparer deux ensembles, il est entendu que la relation d'ordre sous-jacente est l'inclusion. On demande donc de montrer que l'un des deux ensembles est inclus dans l'autre lorsque c'est le cas, ou de montrer que les ensembles sont égaux lorsque c'est le cas, ou de montrer qu'ils sont incomparables lorsque c'est le cas ou que la réponse dépend de A et B.