 Novembre 2023

Suites (1)
Définitions, premières propriétés, exemples.

1 Premières définitions sur les suites réelles

Définition 1.

On appelle suite réelle toute application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie infinie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

- **Notations**

— Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, u_n est le terme d'indice n de la suite u.
— On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.
— On étudiera aussi des suites indexées par $\mathbb{N}^*$. Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une telle suite, on pourra aussi écrire $v = (v_n)_{n\geq 1}$. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$.

Il y a essentiellement trois façons de définir une suite.

1. La plus simple est de donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de u_n. Par exemple soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$$
On dira que la suite est définie **explicitement.**
2. On peut aussi défnir une suite **par récurrence**, récurrence simple, double etc. Voir cours sur le raisonnement. Par exemple soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n} \end{cases}$$
Attention ! Il n'est pas clair du tout que cette suite soit bien définie !

Autre exemple soit $F = (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$
3. Enfin on peut la définir de manière **implicite**. Par exemple on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ à l'équation (E_n) :
$$-1 + nx + x^2 + n^2x^3 = 0$$
On note alors x_n cette unique solution. On définit ainsi une suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *(exercice calculer x_0.)*

Méthode (Définition des suites).

L'une des premières questions dans un exercice sur les suites est souvent : Montrer que la suite est bien définie. Bien sûr selon les différents types de définitions on ne procèdera pas de la même façon.

1. Si la suite est définie explicitement, on cherchera à montrer que l'expression de u_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Si la suite est définie par récurrence, il faudra montrer par récurrence que la suite est bien définie.
3. Pour une suite définie implicitement, le point clef est de montrer que l'équation dépendante de n admet bien une unique solution sur l'intervalle demandé.

Exemple 1

1. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, u_n = \ln(n^2 + 3n - 4)$$
est bien définie.
2. Montrer que la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 1/2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{1-\sqrt{1-v_n}}{3} \end{cases}$$
est bien définie.
3. Montrer que la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie plus haut est bien définie.

Définition 2 (Opérations sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

— La somme des suites u et v est la suite réelle notée $u + v$, définie par $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Le produit de la suite u par le scalaire λ est la suite réelle notée λu, définie par $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Le produit des suites u et v est la suite réelle notée uv, définie par $uv = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Remarque**. Ces définitions sont très similaires à celles que nous avons vu sur les fonctions !

Définition 3.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On dit que u est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
Dans ce cas, on dit que M est un **majorant** de la suite u.
2. On dit que u est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$.
Dans ce cas, on dit que m est un **minorant** de la suite u.
3. On dit que u est **bornée** si u est à la fois majorée et minorée.

Exemple 2

1. La suite $u = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par -1.
2. Montrer que la suite $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$w_n = \frac{1+\sin n}{n^2+5}$$
est bornée.

Proposition 4.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On a l'équivalence : la suite u est bornée si et seulement si la suite $\left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Exemple 3

Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-\cos n)^n$ est bornée.

Proposition 5.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si u et v sont bornées, alors $u + v$ et uv sont bornées.
2. Si u est bornée, alors λu est bornée.

Définition 6.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On dit que u est **croissante** (resp. **strictement croissante**) si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$).
2. On dit que u est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$).
3. On dit que u est **monotone** (resp. **strictement monotone**) si u est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Exemple 4

Montrer que la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5n}{n+2}$$

est croissante.

- **Remarque**. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante, alors pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$, on a $u_n \leq u_p$.

Définition 7.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou encore sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Remarque : On vérifie par récurrence que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors on a la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$\varphi(n) \geq n$".

Exemple 5

— Les suites $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\geq 1}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appelés suites extraites paire et impaire.

2 Exemples de suites réelles

2.1 Suites arithmétiques et géométriques

2.1.1 Suites arithmétiques

Définition 8.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $r \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** de raison r si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 9.

Soit $r \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$.

2.1.2 Suites géométriques

Définition 10.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $q \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** de raison q si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$.

Proposition 11.

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = q^n u_0$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   — si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0$ (ici, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante) ;
   — si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{u_{n+1} - u_0}{q - 1}$.

2.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 12.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ avec $a \neq 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

- **Remarque**. Si $a = 1$, on reconnaît une suite arithmétique. Si $b = 0$, on reconnaît une suite géométrique.

Méthode.

Soient a et b deux réels non nuls avec de plus $a \neq 1$ et α_0 un réel. Considérons la suite arithmético géométrique u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

On veut trouver la forme explicite de cette suite. C'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut exprimer u_n en fonction de n.
L'idée de cette méthode est de se ramener à une suite géométrique. Ce qui va permettre, grâce à la proposition 17 d'exprimer le terme général.

- On note c la solution de l'équation :

$$r = ar + b$$

Soit maintenant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - c$$

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est une suite géométrique.
Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et c on a les deux égalités :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & au_n + b & \qquad (1) \\ c & = & ac + b & \qquad (2) \end{array}$$

En soustrayant la ligne (2) à la ligne (1). On obtient :

$$\begin{array}{rrcl} & u_{n+1} - c & = & a(u_n - c) \\ \iff & v_{n+1} & = & av_n \end{array}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison a. Ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = a^n v_0$$

Or par définition de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v_0 = \alpha_0 - c$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(\alpha_0 - c) + c$$

Exemple 6

Trouver le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$$

2.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

2.3.1 Étude

Définition 13.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre** 2 s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta \neq 0$ et tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

On appellera l'équation

$$\begin{array}{rc} & z^2 = \alpha z + \beta \\ \iff & z^2 - \alpha z - \beta = 0 \end{array}$$

L'équation caractéristique de la suite.

Exemple 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 3$, $u_1 = 7$, et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.

3. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Théorème 14 (Calcul du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. C'est à dire telle qu'il existe α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

Notons (E) son équation caractéristique et Δ le discriminant de l'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $\Delta = \alpha^2 + 4\beta$.

- Si $\Delta > 0$, (E) a deux racines réelles notées r_1 et r_2. Il existe alors un unique couple de réels (λ, ν) tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \nu r_2^n.$$
- Si $\Delta = 0$, E admet une unique solution réelle r_0. Il existe alors un unique couple de réels (λ, ν) tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \nu) r_0^n$$
- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux solutions complexes pures conjuguées, $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-\theta}$. Il existe alors un unique coupe de réels (λ, ν) tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n \Big(\lambda \cos(n\theta) + \nu \sin(n\theta)\Big).$$

- **Remarques**

1. La démonstration du théorème sera vue ultérieurement.
2. Pour trouver λ et ν il suffit de regarder le résultat pour les deux premiers termes de la suites et de résoudre le système associé.

Nous démontrerons cependant la proposition suivante.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta \neq 0$.
Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$.

Proposition 15.

Sous les même hypothèses que le théorème précédent on a :

- Si $\Delta > 0$, (E) a deux racines réelles notées r_1 et r_2, alors les suites $\left(r_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennet à $\mathcal{S}$.
- Si $\Delta = 0$, E admet une unique solution réelle r_0. Les suites $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\mathcal{S}$.
- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux solutions complexes pures conjuguées, $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$alors les suites complexes $\left(r_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennet à $\mathcal{S}$.

Exemple 8

Expliciter le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies plus haut.

2.4 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse ici plus en détails aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I.

Remarque. Nous l'avons vu une telle relation de récurrence ne permet pas toujours de bien définir une suite. Par exemple il n'existe pas de suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \sqrt{1 - u_n}$. La proposition qui suit formalise les conditions d'existence de ces suites.

Proposition 16.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que I est stable par f (c'est à dire $f(I) \subset I$) et $a \in I$.
Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Remarque. Si f est une fonction affine, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

Proposition 17.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone :
   (a) Si $f(a) - a \geq 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Si $f(a) - a \leq 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de monotomie contraire.

Remarque. Pour déterminer la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il peut parfois être int'éressant d'étudier le signe de $x \mapsto f(x)-x$ sur I. En effet, supposons par exemple que : $\forall x \in I, f(x) - x \geq x$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) - u_n \geq 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait croissante.