Lycée Condorcet
PCSI

Janvier 2024

Applications

Applications

Exercice 1.
On considère les applications f et g définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & 2k \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

Les applications f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice 2.
On dit qu'un entier n est un carré parfait lorsqu'il existe un entier k tel que $n = k^2$. On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{k} & \text{si } k \text{ est un entier parfait} \\ k+1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3.
Montrer que l'application

$$h : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^* \\ (m,n) & \mapsto & 2^m(2n+1) \end{cases}$$

est bijective.

Exercice 4.
Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On conisidère l'application h définie par :

$$h : \begin{cases} E & \to & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 5.
Soit E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Dans le cas où f est bijective, déterminer son application réciproque.

Exercice 6.
Soit E un ensemble et f une application de E dans E.

1. Supposons que $f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = Id_E$.
2. Supposons que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Image directe, image réciproque

Exercice 7.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$. Déterminer les ensembles suivants :

$$f(\mathbb{R}),\quad f([0,\pi]),\quad f([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]),\quad f^{-1}(\{0\}),\quad f^{-1}(\{\frac{\sqrt{3}}{2}\}),\quad f^{-1}([0,1])$$

$$f^{-1}(f(\{0\}),\quad f(f^{-1}(\{0\}),\quad f^{-1}(f([0,\frac{\pi}{2}]),\quad f(f^{-1}([0,1])).$$

Exercice 8.
Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.

1. Montrer que si A est une partie de F alors $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.
2. Soient M et N deux parties de E.
   (a) On suppose que f est injective, montrer que $f(M \cap N) = F(M) \cap f(N)$.
   (b) Montrer que si, pour tout couple (M, N) de parties de E, on a $f(M \cap N) = F(M) \cap F(N)$, alors f est injective.

Exercice 9.
Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.

1. Montrer que l'on a : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\quad A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si, $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.
3. Montrer que l'on a : $\forall B \in \mathcal{P}(F),\quad f(f^{-1}(B)) \subset B$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si, $\forall B \in \mathcal{P}(F), B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 10.
Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. On considère les applications :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \right. \quad \text{et } \psi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (a) f est injective | (b) ϕ est injective | (c) ψ est surjective

2. Montrer que les assrtions suivantes sont équivalentes :

   (a) f est surjective | (b) ϕ est surjective | (c) ψ est injective