Lycée Condorcet
PCSI

09 décembre 2023

Devoir surveillé 4
Mathématiques

4 heures

Questions de cours

1. Donner la définition d'un intervalle (celle du chapitre des propriétés de $\mathbb{R}$).
2. Soit I un intervalle (au sens de ci-dessus) non majoré et minorée.
   Rappeler pourquoi I admet une borne inférieure. On la notera a. On suppose que $a \notin I$.
   Montrer que $I =]a, +\infty[$.

Calculs divers

1. (a) À l'aide du changement de variables $x = \sqrt{t}$ calculer l'intégrale :
   $$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$$
   (b) À l'aide du changement de variables $t = \arctan(x)$, montrer qu'on a
   $$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)^2 \, \mathrm{d}t$$
   et calculer l'intégrale.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
   $$(E) : y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)$$
3. (a) Donner le terme général de la suite définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$
   (b) Donner le terme général de la suite définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Problème 1 : Recollement

Soit l'équation différentielle

$$y'(x) - \frac{2}{x}|y(x)| = 1 \qquad (E).$$

Elle est du premier ordre mais n'est pas linéaire : on ne peut pas lui appliquer directement les résultats de notre cours. On va chercher ses solutions, c'est à dire les fonctions $y : x \mapsto y(x)$ dérivables sur $]0, +\infty[$ telles que l'égalité (E) est satisfaite pour tout $x > 0$. On pose les deux équations auxiliaires.

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 1 \qquad (E^+)$$

et

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = 1 \qquad (E^-).$$

1. **(a) Déterminer S^+, l'ensemble des solutions de (E^+) sur $]0, +\infty[$.**

   (b) Déterminer S^-, l'ensemble des solutions de (E^-) sur $]0, +\infty[$.

2. **Pour résoudre (E), on raisonne par analyse-synthèse. Supposons que f soit une solution de (E) sur $]0, +\infty[$, c'est à dire une fonction dérivable sur cet intervalle telle que l'égalité (E) soit vraie pour tout $x > 0$.**

   (a) Montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

   (b) Montrer que f n'est pas strictement positive sur $]0, +\infty[$.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde, et utiliser la question 1.

   (c) Montrer que f n'est pas strictement négative sur $]0, +\infty[$.

   (d) En déduire l'existence d'un unique réel γ strictement positif tel que $f(\gamma) = 0$. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point γ.

3. **Démontrer que les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme**

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3 - \gamma^3}{3x^2} & \textbf{si } x \in]0, \gamma] \\[2ex] \dfrac{x(x-\gamma)}{\gamma} & \textbf{si } x \in]\gamma, +\infty[\end{cases}$$

   où γ est un réel strictement positif.

1. (a) Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $-\mathrm{Id}$ est une solution particulière. On peut le remarquer ou faire une variation de la constante pour le découvrir. On a finalement

$$S^+ = \left\{x \mapsto -x + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

   (b)

$$S^- = \left\{x \mapsto \frac{x}{3} + \frac{\lambda}{x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. (a) On a $\forall x > 0 \ f'(x) = 1 + \frac{2}{x}|f(x)| > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

   (b) Supposons que f est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Alors, pour tout x dans cet intervalle, on a $|f(x)| = f(x)$, et f est solution de (E^+). D'après la question 1(a), on peut écrire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto -x + \lambda x^2$. On a donc

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = -1 + 2\lambda x.$$

Si $\lambda \leq 0$, f' est strictement négative, et f strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui est contradictoire avec la question précédente. Si $\lambda > 0$, alors f' est négative sur $]0, \frac{1}{2\lambda}[$ et donc f est décroissante sur cet intervalle, ce qui est encore absurde au regard de la question précédente. On vient de prouver par l'absurde que f ne demeure pas positive sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$.

(c) Supposons que f est strictement négative sur $]0, +\infty[$. Alors, pour tout x dans cet intervalle, on a $|f(x)| = -f(x)$, et f est solution de (E^-). D'après la question 1(b), on peut écrire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \frac{x}{3} + \frac{\lambda}{x^2}$. On a $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui est absurde pour une fonction négative. On vient donc de prouver que f ne demeure pas strictement négative sur $]0, +\infty[$.

(d) La fonction f est strictement croissante et change de signe. Elle est de plus continue sur $]0, +\infty[$ car dérivable. D'après le TVI strictement monotone, il existe un unique $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(\gamma) = 0$. On a $f'(\gamma) - \frac{2}{\gamma}|f(\gamma)| = 1$, d'où $f'(\gamma) = 1$. L'équation de la tangente au point γ est donc $y = x - \gamma$.

3. • La fonction f considérée en question 2 est négative sur $]0, \gamma[$: elle y est donc solution de E^- et on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]0, \gamma[\quad f(x) = \frac{x}{3} + \frac{\lambda}{x^2}.$$

On a supposé que f était dérivable sur $]0, +\infty[$. Elle est donc continue sur cet intervalle et notamment au point γ. On a donc $\lim\limits_{x \to \gamma-} f(x) = f(\gamma) = 0$, d'où

$$\frac{\gamma}{3} + \frac{\lambda}{\gamma^2} = 0.$$

On en déduit que $\lambda = -\gamma^3/3$. En substituant, on obtient

$$\forall x \in]0, \gamma[\quad f(x) = \frac{x}{3} - \frac{\gamma^3}{3x^2} = \frac{x^3 - \gamma^3}{3x^2}.$$

L'expression précédente est valide pour $x = \gamma$.

La fonction f est positive sur $]\gamma, +\infty[$. : elle y est donc solution de E^+ et on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]0, \gamma[\quad f(x) = -x + \lambda x^2.$$

On a supposé que f était dérivable sur $]0, +\infty[$. Elle est donc continue sur cet intervalle et notamment au point γ. On a donc $\lim\limits_{x \to \gamma-} f(x) = f(\gamma) = 0$, d'où

$$-\gamma + \lambda\gamma^2 = 0.$$

On en déduit que $\lambda = \frac{1}{\gamma}$. En substituant, on obtient

$$\forall x \in]0, \gamma[\quad f(x) = \frac{x^2}{\gamma} - x = \frac{x(x - \gamma)}{\gamma}.$$

On vient de démontrer que toute solution de (E) était bien de la forme donnée par l'énoncé.

• Synthèse. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3 - \gamma^3}{3x^2} & \text{si } x \in]0, \gamma] \\ \dfrac{x(x - \gamma)}{\gamma} & \text{si } x \in]\gamma, +\infty[\end{cases}$ où $\gamma \in]0, +\infty[$.

Sur $]0, \gamma]$, d'après la question 1(b), f est solution de (E^-). Elle est négative sur cet intervalle, où on a donc $|f| = -f$. On a donc

$$\forall x \in]0, \gamma] \quad f'(x) - \frac{2}{x}|f(x)| = f'(x) + \frac{2}{x}f(x) = 1.$$

Sur $]\gamma, +\infty[$, f est solution de (E^+) d'après la question 1 (a). Sur cet intervalle, elle est positive : on a donc $|f| = f$ et on a bien

$$\forall x > \gamma \quad f'(x) - \frac{2}{x}|f(x)| = f'(x) + \frac{2}{x}f(x) = 1.$$

• Conclusion. Les solutions sont bien les fonctions décrites par l'énoncé.

Problème 3 :Équations d'Euler

Soient a et b deux nombres réels et c une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. L'équation différentielle suivante est appelée équation d'Euler :

$$t^2y'' + aty' + by = c(t) \quad (E)$$

Elle ne fait pas partie des équations que le cours nous apprend à résoudre. En utilisant un *changement de fonction inconnue*, on va se ramener à une équation que l'on sait traiter.

Partie A. Résoudre $y'' - 2y' + 5y = e^{2x} \qquad (E_0)$

Partie B. Changement de fonction inconnue.

Soit $y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) \end{array} \right.$ **une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.**

On définit $z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(e^x) \end{array} \right.$ **(noter le changement de variable muette).**

1. **Justifier que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer z' et z'' en fonction de y et de ses dérivées.**
2. **Montrer que y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, que l'on précisera.**

Partie C. Application.

En utilisant la partie B, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation d'Euler

$$t^2y'' - ty' + 5y = t^2 \quad (E_1).$$

Partie A. Une équation différentielle.

Remarque : nos habitudes sont bousculées par la notation de l'énoncé : ici l'équation avec second membre (E_0) n'est pas une équation homogène.

• On résout d'abord, l'équation homogène associée à (E_0), qu'on notera (E_0^h). L'équation caractéristique $x^2 - 2x + 5 = 0$, de discriminant strictement négatif, a pour racines $1 + 2i$ et $1 - 2i$. Les solutions de (E_0^h) sont donc les fonctions de l'ensemble

$$\mathcal{S}_0^h = \{x \mapsto e^x \left(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)\right), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

• Recherche d'une solution particulière de (E_0).
Remarquons maintenant que 2 n'étant pas racine de l'équation caractéristique, le cours nous encourage à chercher une solution particulière de la forme $z : x \mapsto Be^{2x}$, où B est une constante à déterminer. On a $z' = 2z$ et $z'' = 4z$. Ainsi, z est solution de (E) si et seulement si $4B - 2 \cdot 2B + 5B = 1$, c'est à dire si $B = \frac{1}{5}$.
• On sait alors que l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{5}e^{2x} + e^x \left(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)\right), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Partie B. Changement de fonction inconnue.

1. On a $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de dérivation des composées, $z = y \circ \exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z'(x) = e^x y'(e^x)$$

On sait montrer de même que z' est dérivable, comme composée et produit [*stratégie de rédaction : on l'a fait une fois soigneusement donc à la seconde, on peut se permettre d'aller plus vite.*]

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z''(x) = e^x y'(e^x) + e^x.e^x y''(e^x) = z'(x) + (e^x)^2 y''(e^x).$$

2. La fonction y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad t^2 y''(t) + aty'(t) + by(t) = c(t).$$

Cette dernière ligne est *équivalente* à

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)^2 y''(e^x) + ae^x y'(e^x) + by(e^x) = c(e^x).$$

Expliquons. Si la ligne du haut est vraie, on peut l'appliquer aux nombres $t = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si la ligne du bas est vraie alors, en appliquant l'égalité pour $x = \ln(t)$, avec $t \in \mathbb{R}_+^*$, on montre la ligne du haut. D'après les calculs faits en 1, la dernière ligne est équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z''(x) + (a-1)z'(x) + bz(x) = c(e^x).$$

On a montré que y était solution de (E) si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$z'' + (a-1)z' + bz = c(e^x).$$

Partie C. Application.

Ici, $a = -1$, $b = 5$ et c est la fonction $t \mapsto t^2$. On a donc $a - 1 = -2$.

D'après la partie B, la fonction $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est solution de (E_1) si et seulement si la fonction $z : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(e^x) \end{array} \right.$ est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$z'' - 2z' + 5z = (e^x)^2 \ (= e^{2x}) \quad (E_0).$$

On a la bonne surprise (mais est-ce vraiment une surprise ?) de retrouver l'équation résolue dans la partie A. On rappelle que les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{5}e^{2x} + e^x \left(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)\right),$$

avec λ et μ des réels. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = y(e^x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad y(t) = z(\ln(t)).$$

On en déduit que les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{1}{5}t^2 + t\left(\lambda\cos(2\ln(t)) + \mu\sin(2\ln(t))\right) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Problème 2 : Différence symétrique

Soit E un ensemble non vide.

Partie 1 : Fonction indicatrice

Pour toute partie non vide A de E, on définit l'application indicatrice de A notée $\mathbb{1}_A$, par :

$$\mathbb{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \mathbb{1}_A(x) \end{array} \right.$$

avec pour tout $x \in E$:

$$\mathbb{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \textbf{si } x \in A \\ 0 & \textbf{si } x \notin A \end{array} \right.$$

Soit A et B deux parties de E. Montrer les propriétés suivantes :
les démonstrations demandées se font, pour la plupart, par disjonction de cas.

1. **On a l'équivalence :** $\quad A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
   On rappelle que l'égalité entre les fonctions se traduit par :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$$

2. **On a l'égalité de fonctions :** $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$**.**
3. **On a l'égalité de fonctions :** $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$**.**
4. **On a l'égalité de fonctions :** $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$**.**
5. **On a l'égalité de fonctions :** $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A \times (1 - \mathbb{1}_B)$**.**

Corrigé :

1. Notons que, par définition de $\mathbb{1}_A$, nous avons, pour tout $x \in E$, l'équivalence :

$$x \in A \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 1$$

   On raisonne alors par équivalence :

$$\begin{array}{rcl} A = B & \Longleftrightarrow & \forall x \in E, \quad (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in E, \quad (\mathbb{1}_A(x) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_B(x) = 1) \end{array}$$

   Et comme les fonctions $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ ne peuvent prendre que deux valeurs on conclue que

$$\boxed{A = B \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B}$$

2. Montrons que, pour tout $x \in E$, on a

$$\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_A(x)$$

Soit $x \in E$. Raisonnons par disjonction de cas :
- Si $x \in A$ alors $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_A(x)$.
- Si $x \notin A$ alors $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_A(x) = 0 = \mathbb{1}_A(x)$.

Ainsi on a bien $\boxed{\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A}$

3. Soit $x \in E$.
- Si $x \in A$ alors $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 0$ et $1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 - 1 = 0$.
- Si $s \notin A$ alors $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1$ et $1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 - 0 = 1$

Ainsi on a bien $\boxed{\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A}$

4. Soit $x \in E$.
- Si $x \in A \cap B$ alors $x \in A$ et $x \in B$. D'où :

$$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1, \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$$

on a donc bien

$$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$$

- si $x \notin A \cap B$ alors soit $x \notin A$ et dans ce cas $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $x \notin B$ et dans ce cas $\mathbb{1}_B(x) = 0$. Ainsi dans les deux cas on a $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0$. D'où :

$$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0 = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$$

On ainsi démontré que

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B}$$

5. On a, par définition, $A \backslash B = A \cap \overline{B}$ donc, d'après ce que nous avons démontré, on a

$$\mathbb{1}_{A\backslash B} = \mathbb{1}_{A\cap\overline{B}} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{\overline{B}} = \mathbb{1}_A \times (1 - \mathbb{1}_B)$$

On a bien

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\backslash B} = \mathbb{1}_A \times (1 - \mathbb{1}_B)}$$

Dans la suite du problème on admettra que

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$$

Partie 2 : Différence symétrique

Si A et B sont deux parties de E, on appellera *différence symétrique* de A et B la partie de E définie par :

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

1. **Montrer que :** $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
2. **En déduire que :** $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
3. **Soient A, B et C trois parties de E. En utilisant les résultats de la question précédente, démontrer les propriétés suivantes :**
   (a) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

(b) $A\Delta B = A\Delta C \quad \Longrightarrow \quad B = C$

(c) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

Corrigé :

1. On a, d'après les définitions, la distributivité de l'intersection sur la réunion et les lois de Morgan :

$$\begin{array}{rcl} A\Delta B & = & (A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)} \\ & = & (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) \\ & = & (A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{B}) \\ & = & (B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B}) \end{array}$$

La dernière ligne est obtenue car $A\cap\overline{A}=\emptyset$ et la réunion d'un ensemble X et de l'ensemble vide est égal à X. On a donc bien

$$\boxed{A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)}$$

2. On a ainsi d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{A\Delta B} & = & \mathbb{1}_{(A\backslash B)\cup(B\backslash A)} \\ & = & \mathbb{1}_{A\backslash B}+\mathbb{1}_{B\backslash A}-\mathbb{1}_{(A\backslash B)\cap(B\backslash A)} \end{array}$$

Mais $(A\backslash B)\cap(B\backslash A) = A\cap\overline{B}\cap B\cap\overline{A}=\emptyset$ On a ainsi

$$\mathbb{1}_{(A\backslash B)\cap(B\backslash A)}=0$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{A\Delta B} & = & \mathbb{1}_{A\backslash B}+\mathbb{1}_{B\backslash A} \\ & = & \mathbb{1}_{A}(1-\mathbb{1}_{B})+\mathbb{1}_{B}(1-\mathbb{1}_{A}) \\ & = & \mathbb{1}_{A}+\mathbb{1}_{B}-2\mathbb{1}_{A}\mathbb{1}_{B} \end{array}$$

On a donc bien

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\Delta B}=\mathbb{1}_{A}+\mathbb{1}_{B}-2\mathbb{1}_{A}\mathbb{1}_{B}}$$

3. (a) D'après les questions précédentes on a les égalités :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta,C)} & = & \mathbb{1}_{A}+\mathbb{1}_{B\Delta C}-2\mathbb{1}_{A}\mathbb{1}_{B\Delta C} \\ & = & \mathbb{1}_{A}+\mathbb{1}_{B}+\mathbb{1}_{C}-2\mathbb{1}_{B}\mathbb{1}_{C}-2\mathbb{1}_{A}(\mathbb{1}_{B}+\mathbb{1}_{C}-2\mathbb{1}_{B}\mathbb{1}_{C}) \\ & = & \mathbb{1}_{A}+\mathbb{1}_{B}+\mathbb{1}_{C}-2(\mathbb{1}_{A}\mathbb{1}_{B}+\mathbb{1}_{A}\mathbb{1}_{B}+\mathbb{1}_{B}\mathbb{1}_{C})+4\mathbb{1}_{A}\mathbb{1}_{B}\mathbb{1}_{C} \end{array}$$

Par ailleurs on a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} & = & \mathbb{1}_{A\Delta B}+\mathbb{1}_{C}-2\mathbb{1}_{A\Delta B}\mathbb{1}_{C} \\ & = & \mathbb{1}_{A}+\mathbb{1}_{B}-2\mathbb{1}_{A}\mathbb{1}_{B}+\mathbb{1}_{C}-2(\mathbb{1}_{A}+\mathbb{1}_{B}-2\mathbb{1}_{A}\mathbb{1}_{B})\mathbb{1}_{C} \\ & = & \mathbb{1}_{A}+\mathbb{1}_{B}+\mathbb{1}_{C}-2(\mathbb{1}_{A}\mathbb{1}_{B}+\mathbb{1}_{A}\mathbb{1}_{C}+\mathbb{1}_{B}\mathbb{1}_{C})+4\mathbb{1}_{A}\mathbb{1}_{B}\mathbb{1}_{C} \end{array}$$

On a ainsi montrer que :

$$\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}=\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$$

et d'après la question 1 de la partie 1 on en déduit :

$$\boxed{A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C}$$

(b) Supposons que $A\Delta B = A\Delta C$ on a alors $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_{A\Delta C}$. On en déduit, d'après la question 1 de la partie 2.

$$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C$$

Cette égalité est équivalente à l'égalité :

$$\mathbb{1}_B(1 - 2\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_C(1 - 2\mathbb{1}_A)$$

Mais pour tout $x \in E$, $1 - 2\mathbb{1}_A(x) = \pm 1$ il ne s'annule jamais on a donc

$$\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_C$$

Ce qui implique d'après la question 1, $B = C$. On a donc bien montré que

$$\boxed{A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C}$$

(c) On a, d'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} &= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C} \\
&= \mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) \\
&= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C \\
&= \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap C} - 2\mathbb{1}_{A\cap B}\mathbb{1}_{A\cap C}
\end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue car

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A$$

On a ainsi, d'après la question 4 de la partie 1 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} &= \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap C} - 2\mathbb{1}_{A\cap B}\mathbb{1}_{A\cap C} \\
&= \mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}
\end{aligned}$$

La première question de la partie 1 permet ainsi de déduire :

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

Partie 3 : Résolution d'une équation

Soient A et B deux parties de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On définit l'application :

$$\Phi_A : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & A\Delta X \end{cases}$$

4. **Soit X une partie de E.**
   (a) **Calculer $A\Delta A$ et $A\Delta X$.**
   (b) **Utiliser les résultats de la partie 2 pour en déduire la valeur de $\Phi_A(\Phi_A(X)$.**
5. **En déduire que Φ_A admet une application réciproque et la donner.**
6. **Déduire de ce qui précède que, pour toutes parties A et B fixées ou X est l'inconnue, l'équation $A\Delta X = B$ possède une unique solution que l'on exprimera en fonction de A et B.**

Corrigé

1. On a (voir TD)

$$A\Delta A = \emptyset \quad \text{et} \quad A\Delta X = (A\backslash X) \cap (X\backslash A)$$

2. On a, d'après la question précédente et la question 3(a) de la partie 2 :

$$\begin{array}{rcl}\Phi_A(\Phi_A(X)) & = & A\Delta(A\Delta X) \\ & = & (A\Delta A)\delta X \\ & = & \emptyset\Delta X \\ & = & (\emptyset\cap\overline{X})\cup(X\cap E) \\ & = & X\end{array}$$

Ainsi pour tout partie X de E on a

$$\boxed{\Phi_A(\Phi_A(X)) = X}$$

3. D'après la question précédente on a, pour toute partie X de E

$$\Phi_A(\Phi_A(X)) = X$$

Ainsi

$$\Phi_A \circ \Phi_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$$

L'application Φ_A est sa propre réciproque (on dit qu'elle est involutive).

4. Soient A et B deux parties de E. Notons que l'équation $A\Delta X = B$ est équivalente à l'équation

$$\Phi_A(X)) = B$$

Cette équation implique bien sûr que

$$\Phi_A(\Phi_A(X) = \Phi_A(B)$$

Mais comme Φ_A admet une application réciproque ces deux équations sont en fait équivalentes. En effet pour la deuxième équation implique que

$$\Phi_A(\Phi_A(\Phi_A(X))) = \Phi_A(\Phi_A(B))$$

Autrement dit d'après la question précédente :

$$\Phi_A(X) = B$$

On a ainsi, d'après la question précédente :

$$\Phi_A(X) = B \iff \Phi_A(\Phi_A(X)) = \Phi_A(B) \iff X = A\Delta B$$

$$\boxed{\text{Ainsi l'équation A}\Delta X = B \text{ admet une unique solution : } X = A\Delta B.}$$