Lycée Condorcet
PCSI

Décembre 2023

Suites (2)
Limites

On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer,...

(D'Alembert, 1765 ;*Encyclopédie*, tome neuvième, à Neuchatel.)

Lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe, il est souvent utile d'indiquer cette limite par une notation particulière, c'est ce que nous ferons, en plaçant l'abréviation

lim

devant la quantité variable dont il s'agit...

(Cauchy 1821, *Cours d'analyse*)

Table des matières

1 Limites finies **2**
- 1.1 Définition, propriétés . . . 2
- 1.2 Suites extraites et limites finies . . . 4
- 1.3 Opérations sur les limites finies . . . 6
- 1.4 Limites finies et ordre . . . 7

2 Limites infinies **9**
- 2.1 Définitions et propriétés . . . 9
- 2.2 Récapitulatif : opérations sur les limites finies ou infinies . . . 12

3 Monotonie et convergence **13**
- 3.1 Théorème de la limite monotone. . . . 13
- 3.2 Suites adjacentes . . . 14

4 Suites usuelles **14**
- 4.1 Croissances comparées . . . 14
- 4.2 Suites récurrentes . . . 15

5 Une introduction aux suites complexes **15**

1 Limites finies

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et l un réel.
En terminale, pour exprimer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l quand n tend vers $+\infty$ vous disiez que :

Tout intervalle fermé contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang

Nous allons traduire cette définition en language formel et pour cela nous avons besoin de la comprendre et de la modifier légèrement.

On peut remplacer dans cette phrase "tout intervalle fermé" par "tout intervalle fermé centré en l". On obtient alors la définition :

Tout intervalle fermé centré en l contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

Mais les intervalles fermé centrés en l sont les intervalles de la forme $]l-\epsilon, l+\epsilon[$ avec ϵ un réel strictement positif. Ainsi la définition devient :

Pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[l-\epsilon, l+\epsilon]$ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une certaine propriété "à partir d'un certain rang" s'il existe un entier N_0 tel que si n est un entier et si $n \geq N_0$, alors u_n vérifie cette propriété. Par exemple la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

est strictement positive à partir d'un certain rang. Ici c'est le rang 3.
Si on revient à la définition on obtient alors :

Pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, il existe un entier N_0 tel que pour tout entier $n \geq N_0$, u_n appartient à l'intervalle $[l-\epsilon, l+\epsilon]$.

On peut alors exprimer qu'un réel x appartient à l'intervalle $[l-\epsilon, l+\epsilon]$ comme suit :

$$x \in [l-\epsilon, l+\epsilon] \iff l-\epsilon \leq x \leq l+\epsilon \iff -\epsilon \leq x-l \leq \epsilon \iff |x-l| \leq \epsilon$$

Finalement la définition devient :

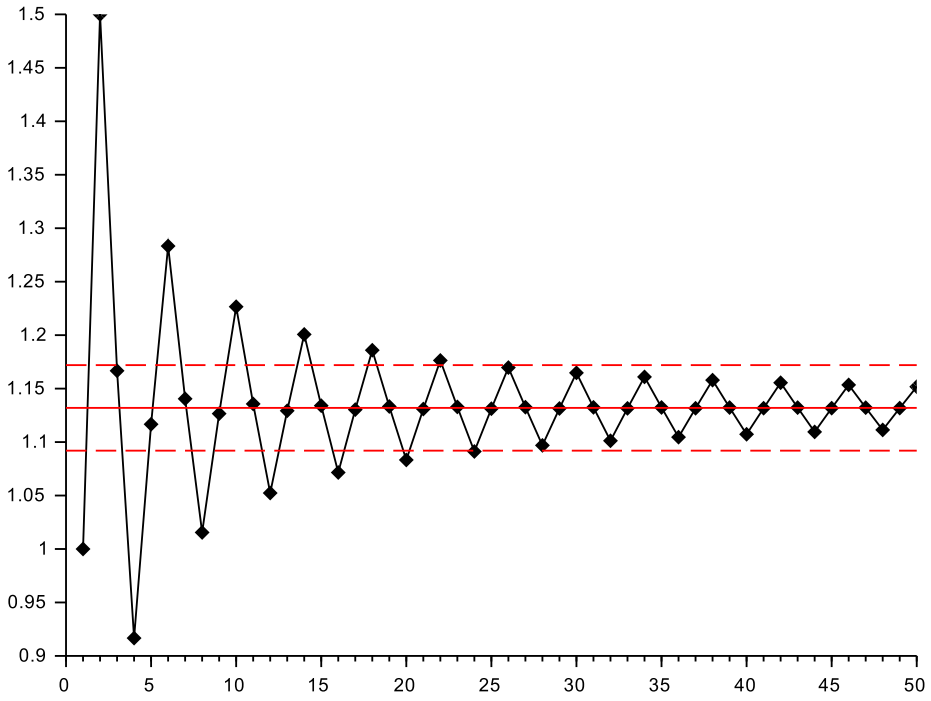
Pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, il existe un entier N_0 tel que pour tout entier $n \geq N_0$, $|u_n - l| \leq \epsilon$.

1.1 Définition, propriétés

Définition 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** (ou : **converge**) s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : tout intervalle ouvert contenant ℓ contient u_n pour tous les indices $n \in \mathbb{N}$, sauf pour un nombre fini d'entre eux.
Autrement dit : quel que soit l'intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$, alors $u_n \in I$.
En termes de quantificateurs, cela s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$



On a ici représenté les cinquantes premiers termes de la suite définie par :

$$s_1 = 1, \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \qquad s_3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$
$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \qquad \ldots \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{[(i-1)/2]} \frac{1}{i}$$

Cette suite converge vers $l = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$. On a aussi représenté les droites d'équations $y = l$, $y = l + 0,01$ et $y = l - 0,01$.

Proposition 2.

Avec les mêmes notations, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors le réel ℓ dont la définition assure l'existence est unique.
On appelle ce réel la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, ou aussi $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

=

Définition 3.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Exemple 1

1. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Montrer que la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge ni vers 1 ni vers -1.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 1. Montrer que la suite est positive à partir d'un certain rang.

Proposition 4.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u converge, alors u est bornée. La réciproque est fausse.

Exemple 2

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n$$

est bornée mais ne converge pas.

Proposition 5.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \iff (u_n - \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |u_n - \ell| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Cas particulier :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $|u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\ell|$.
La réciproque est fausse.

Exemple 3

Pour un contre exemple reprendre l'exemple 2.

Proposition 7.

Deux suites qui ne diffèrent que pour un nombre fini d'indices sont de même nature (i.e. sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

1.2 Suites extraites et limites finies

Proposition 8.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente.
Toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Méthode.

La proposition précédente sera, la plupart du temps, utiliser pour montrer qu'une suite ne converge pas. On utilisera la contraposée.

Exemple 4

Toujours le même exemple ! Montrer que la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n$$

ne converge pas.

Proposition 9.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Supposons que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ et montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
Soit ε un réel strictement positif.
Comme les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ il existe deux entiers N_0 et N_1 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_0 \Rightarrow |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_1 \Rightarrow |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon)$$

Posons $N_2 = \max(2N_0, 2N_1 + 1)$ et montrons qu'il vérifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - \ell|) \leq \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2$. Nous alors fait une disjonction de cas selon la parité de n.
• si n est pair alors il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2n'$ et comme on a supposé $n \geq N_2 \geq 2N_0$ alors $n' \geq N_0$ donc on en déduit que

$$|u_{2n'} - \ell| \leq \varepsilon$$

et donc :

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

• si n est impair, alors il existe un entier n' tel que $n = 2n' + 1$ et comme on a supposé que $n \geq N_2 \geq 2N_1 + 1$ alors $n' \geq N_1$ ainsi

$$|u_{2n'+1} - \ell| \leq \varepsilon$$

et donc :

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Nous avons donc bien montré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_2 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_2$ implique que $|u_n - \ell| \geq \varepsilon$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers ℓ.

1.3 Opérations sur les limites finies

Proposition 10.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$.
On suppose que u est convergente de limite ℓ, et que v est convergente de limite ℓ'. Alors :

1. $u + v$ est convergente de limite $\ell + \ell'$;
2. uv est convergente de limite $\ell\ell'$;
3. λu est convergente de limite $\lambda\ell$.

Proposition 11.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ et que $\ell \neq 0$.
Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang, (i.e. $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \neq 0$), et

$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ et que $\ell \neq 0$. On supposera ici que $\ell > 0$, la démonstration pour ℓ négatif étant similaire.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\ell^2\varepsilon}{2}$$

Par ailleurs, toujours comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et en posant $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$ il existe N_1 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$$

Ainsi en particulier si $n \geq N_1$ alors $u_n \geq \dfrac{\ell}{2} > 0$ et donc comme l'application inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que u_n est positif pour $n \geq N_1$

$$n \geq N_1 \Rightarrow \frac{1}{|u_n|} \leq \frac{2}{\ell}$$

Posons $N_2 = \max(N_0, N_1)$ et montrons qu'il vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \varepsilon$$

Soit donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2$ on a comme ℓ est strictement positif :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n|\ell}$$

Mais comme $n \geq N_2 \geq N_0$ alors $|u_n - \ell| \leq \dfrac{\ell^2\varepsilon}{2}$ et comme $n \geq N_2 \geq N_1$ alors $\dfrac{1}{|u_n|\ell} \leq \dfrac{2}{\ell^2}$ D'où, en multipliant ces deux ingélatés dont tous les termes de ces égalités sont positifs :

$$\frac{|u_n - \ell|}{|u_n|\ell} \leq \varepsilon$$

On a donc bien

$$\boxed{\frac{1}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}}$$

Exemple 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim \dfrac{u_n}{1+u_n} = 0$. Montrer que u_n tend vers 0.

Proposition 12.

Soient u et v deux suites réelles. On suppose que u est bornée, et que v est convergente de limite nulle. Alors uv est convergente de limite nulle.

Exemple 6

Étudier la convergence de la suite $\left(\dfrac{\sin(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1.4 Limites finies et ordre

Proposition 13 (Conservation des inégalités larges).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente.

- Si elle est majorée par un réel M, alors $\lim u_n \leq M$.
- Si est minorée par un réel m, alors $\lim u_n \geq m$.

Il vient alors le résultat suivant : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Attention
Les inégalités strictes ne sont pas respectées !
Par exemple la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 alors que tous ses termes sont strictement positifs.

Théorème 14 (Théorème d'encadrement).

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.
On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$.
On suppose de plus que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite ℓ.

Remarque
Dans ce théorème, il est essentiel de supposer que les deux suites convergent vers la même limite. En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les trois suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = -1 - \frac{1}{n},\quad v_n = (-1)^n \quad , w_n = 1 + \frac{1}{n}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien les inégalités :

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

Pourtant la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exemple 7

1. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},^* \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x \leq \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$

   (b) En déduire que, pour tout réel x, la suite $\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

2. Étudier la convergence des suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} 0 \leq k \leq n &\iff n^2 \leq k + n^2 \leq n^2 + n \\ &\iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

La dernière équivalence est obtenue car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et parce que n est positif. Comme cette double inégalité est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$$

Ainsi en calculant les deux sommes des memebres de droites et de gauche de cette double inégalité on a :

$$\frac{n}{1+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq 1$$

Mais on a :

$$\frac{n}{1+n} = \frac{1}{1+1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi d'après le théorème d'encadrement on a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1}$$

Corollaire 15.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq v_n$. On suppose de plus que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2 Limites infinies

En terminale pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, vous disiez que "tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang". Formellement, on obtient la définition suivante.

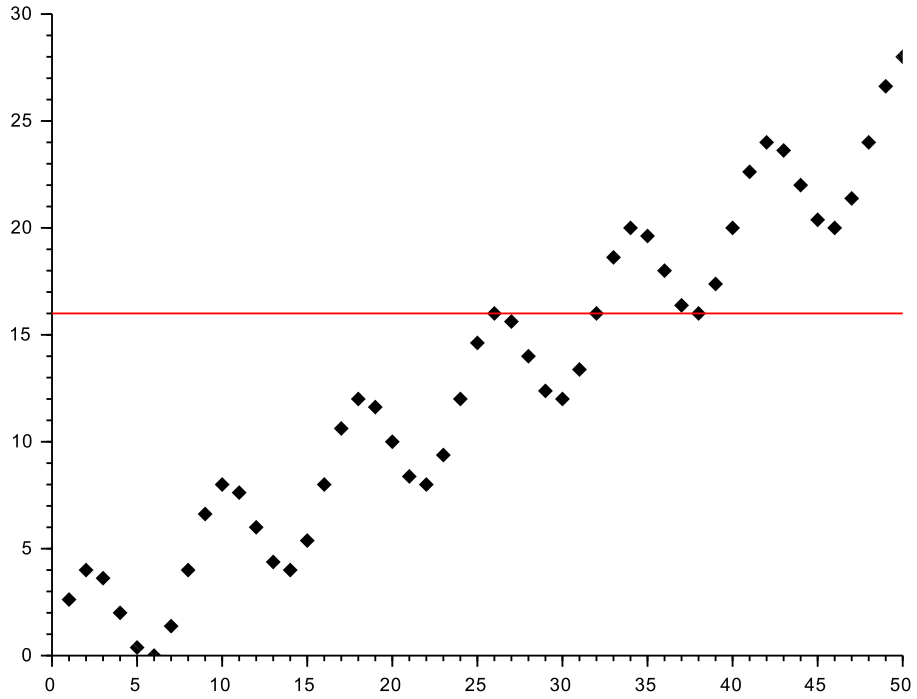
2.1 Définitions et propriétés

Définition 16.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand $n \to \infty$, et on note $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si : pour tout $A \in \mathbb{R}$, $u_n \in]A, +\infty[$ pour tout indice $n \in \mathbb{N}$ sauf un nombre fini.
Autrement dit : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $u_n > A$. En termes de quantificateurs, cela s'écrit :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq A.$$

Dans ce cas, on note aussi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.



On a représenté ici la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = 3 * \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \frac{n}{2}$$

Définition 17.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que u_n tend vers $-\infty$ quand $n \to \infty$, et on note $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si :

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow u_n < B.$$

Dans ce cas, on note aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- **Remarque**. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente (elle est donc divergente).

- **Vocabulaire**. Quand $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, on dit parfois que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente de première espèce.
Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente mais pas divergente de première espèce, on dit qu'elle est divergente de deuxième espèce.
Avec ce vocabulaire, déterminer le comportement de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs de $q \in \mathbb{R}$.

Théorème 18 (Théorème de comparaison.)**.**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$
2. $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Alors $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Théorème 19 (Théorème de comparaison.)**.**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$
2. $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exemple 8

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier, en fonction de x, la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \lfloor nx \rfloor$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel ℓ positif ou nul tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   (a) On suppose que $0 \leq \ell < 1$. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (b) On suppose que $\ell > 1$. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Corrigé :

1.

2. (a) Notons $M = \dfrac{\ell+1}{2}$. Par définition on a $0 < M < 1$. En prenant $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$ et comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq M}$$

Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$, l'assertion $P(n)$:

$$u_n \leq M^{n-n_0} u_{n_0}$$

est vraie. Comme on a :

$$u_{n_0} \leq M^{n_0-n_0} u_{n_0}$$

alors $P(n_0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.
D'après ce qu'on a démontré en début de question et comme u_n est positif on a :

$$u_{n+1} \leq M u_n$$

Par ailleurs par hypothèse de récurrence on a :

$$u_n \leq M^{n-n_0} u_{n_0}$$

D'où comme M est positif :

$$M u_n \leq M^{n+1-n_0} u_{n_0}$$

Ainsi on a bien

$$u_{n+1} \leq M^{n+1-n_0} u_{n_0}$$

Nous avons ainsi montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$.
Le principe de récurrence permet donc de déduire que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq M^{n-n_0} u_{n_0}}$$

Or comme $0 \leq M < 1$ alors $M^{n-n_0} u_{n_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positifs le théorème d'encadrement permet de déduire

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

(b) Comme dans la question précédente, comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ en prenant $\varepsilon = \dfrac{l-1}{2}$ on sait qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \in N$ on a

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

avec $m = \dfrac{l+1}{2}$. Notons que $m > 1$.
Comme ci-dessus on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ alors $m^{n-n_0} u_{n_0} \leq u_n$.
Or comme $m > 1$ alors $m^{n-n_0} u_{n_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ainsi le théorème de comparaison permet de conclure que

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

Proposition 20.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que

1. $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$)
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée).

Alors $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$).

- **Remarque**. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
  - Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.
  - Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Proposition 21.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$) et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel strictement positif, alors $u_n v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $u_n v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$).
2. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$) et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel strictement négatif, alors $u_n v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (resp. $u_n v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$).

2.2 Récapitulatif : opérations sur les limites finies ou infinies

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites finies ou infinies.

Addition. Dans les cases, figure $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n)$, si cette limite existe.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	indéterminé
$-\infty$	$-\infty$	indéterminé	$-\infty$

- **Remarque**. Dans les cas d'indétermination, tous les comportements sont possibles.

Exercice : trouver des exemples permettant d'obtenir différents comportements.

Multiplication. Dans les cases, figure $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n)$, si cette limite existe.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	$\ell' > 0$	$\ell' = 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = 0$	0	0	0	indéterminé	indéterminé
$\ell < 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	indéterminé	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	indéterminé	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- **Remarque**. Dans les cas d'indétermination, tous les comportements sont possibles.

Exercice : trouver des exemples permettant d'obtenir différents comportements.

Tableau pour $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda u_n$ $(\lambda\in\mathbb{R})$

λ \ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\ell\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0
$\lambda < 0$	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$

Tableau pour $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_n}$ (si elle existe)

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\ell\in\mathbb{R}^*$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	indéterminé	0	0

3 Monotonie et convergence

3.1 Théorème de la limite monotone.

Théorème 22 (Théorème de la limite monotone)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   Alors on a l'équivalence : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est majorée.
   Et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Alors on a l'équivalence : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est minorée.
   Et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Supposons qu'elle ne soit pas majorée.
Cela signifie que pour tout $A\in\mathbb{R}$, il existe un entier $N_0\in\mathbb{N}$ tel que $u_{N_0}\geq A$.

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.
Soit $A \in \mathbb{R}$, d'après ce qui précède il existe un entier N_0 tel que $u_{N_0} \geq A$.
Montrons qu'il vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq A$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_0$ alors comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $u_n \geq u_{N_0}$, ainsi on a bien :

$$u_n \geq A$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc bien vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

- **Exemples** où la conclusion ne tient plus quand on omet l'hypothèse de monotonie.

- **Exemple**
  1. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq q < 1$. Alors $q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
  2. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $q > 1$. Alors $q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Attention !
Une suite croissante majorée ne converge pas nécessairement vers le majorant !

Proposition 23.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \ell$).

3.2 Suites adjacentes

Définition 24.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemple 9

Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = 3 - \frac{1}{n+1},\quad v_n = 3 + \frac{2}{n^3}$$

sont adjacentes.

Proposition 25.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles adjacentes, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et ont même limite.

4 Suites usuelles

4.1 Croissances comparées

- Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et si $\boxed{\alpha < \beta, \text{ alors } \frac{n^\alpha}{n^\beta} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$
- Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et si $\boxed{0 < a < b, \text{ alors } \frac{a^n}{b^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$
- Si $(\alpha, q) \in \mathbb{R}^2$ et si $\boxed{|q| > 1, \text{ alors } \frac{n^\alpha}{q^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$
- Si $(\alpha, q) \in \mathbb{R}^2$ et si $\boxed{-1 < q < 1, \text{ alors } \frac{q^n}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$
- Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et si $\boxed{\alpha > 0, \text{ alors } \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$
- Pour tout $q \in \mathbb{R}$, $\boxed{\frac{q^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$
- Enfin, $\boxed{\frac{n!}{n^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$

4.2 Suites récurrentes

Proposition 26.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est continue sur I et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors $f(\ell) = \ell$. On dit que ℓ est un point fixe de f.

Nous démontrerons cette proposition dans un chapitre ultérieur.

Exemple 10

Étudier la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$
$$u_0 \geq -1$$

5 Une introduction aux suites complexes

Définition 27.

Une suite complexe est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

On peut étendre aux suites complexes toutes les propriétés des suites réelles qui ne font pas référence à la notion d'ordre sur $\mathbb{R}$. Les notions de suites croissantes, décroissantes majorées, minorées, etc ne pourront plus être utilisées pour les suites complexes.
Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module.

Définition 28.

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

Définition 29.

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Remarque : Il n'existe pas de notion de limite inifinie.

Proposition 30.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
Elle converge si et seulement si les suites réelles $(Re(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Im(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} Re(u_n) + i \lim_{n\to+\infty} Im(u_n)$$

Proposition 31.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{\ell}$.

Les propriétés sur les opérations sur les limites finies restent identiques et les démonstrations sont similaires.

Proposition 32.

Toute suite complexe convergente est bornée.