Lycée Condorcet
PCSI

Décembre 2023

Propriétés de $\mathbb{R}$, Suites (1)

1 Partie entière

Exercice 1.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercice 2.
Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Montrer que $2n \leq 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$.
2. En déduire la valeur de $\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor$.

Exercice 3.
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a+b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$$

Exercice 4.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

2 Borne inférieure, borne supérieure

Exercice 5.
Les ensembles suivants sont-ils majorés ? minorés ? Si oui, déterminer leur borne inférieure, leur borne supérieure.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\right\} \qquad B = \left\{\tfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
$$C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}, n \in \mathbb{N}^* p \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Exercice 6.
Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer les bornes supérieures, inférieures.

1) $\{a + bn, n \in \mathbb{N}\}$
2) $\{a + (-1)^n b, n \in \mathbb{N}\}$
3) $\{a + b/n, n \in \mathbb{N}^*\}$
4) $\{(-1)^n a + b/n, n \in \mathbb{N}^*\}$
5) $\{a + (-1)^n b/n, n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 7.
Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$-A = \{-a, a \in A\} \qquad A + B = \{a+b, a \in A, b \in B\}$$
$$x + A = \{x + a, a \in A\} \qquad AB = \{ab, a \in A, b \in B\}$$

1. Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Montrer que $\sup(x+A) = x + \sup(A)$.
4. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?

3 Suites arithmético-géométrique et récurrente linéaire d'ordre 2.

Exercice 8.
Donner l'expression du terme général de la suite réccurente réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
2. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$.

Exercice 9.
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles définies par :

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 10.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = (u_n)^3$. Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. La reconnaître.
2. Déterminer v_n et u_n en fonction de n.

Exercice 11.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_n \times u_{n+1}}$.

1. Montrer que la suite est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Reconnaître la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 12.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Exprimer le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4 Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 13.
Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $v_{n+1} = 1/2(1 + v_n)^2$.

1. Déterminer la monotonie de la suite.
2. Montrer que la suite v ne peut pas être majorée.

Exercice 14.
Soit $a > 0$ et la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > \sqrt{a}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1/2\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n > \sqrt{a}$.
2. Étudier la monotonie de u.

Exercice 15.
Dans chacune des situations suivantes, déterminer les variations de la fonction sous-jacente, la position de son graphe par rapport à la droite d'équation $x = y$. Puis étudier en fonction de u_0 la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

a) $u_{n+1} = u_n - \ln u_n$ b) $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ c) $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$ d) $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^2}{4}$

5 Suites définies implicitement

Exercice 16.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ et (E) l'équation $\tan x = x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans I_n.

Exercice 17.
Soient a, b deux réels pour lesquels $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$. On suppose que f est strictement croissante sur $[a, b[$ et que $f(a) \leq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ d'inconnue $x \in [a, b[$ possède une et une seule solution x_n.
2. Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 18.
On pose, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

1. Déterminer la une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
2. Montrer que la suite u est monotone.
3. Montrer que la suite v est géométrique. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire la limite quand n tens vers l'infini de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 19.
Pour tout $n \in_N^*$, on pose $a_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$.

1. Trouver une relation de récurrence entre a_n et a_{n+1}.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 4$, $na_n > n + 2$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 4.