Lycée Condorcet 10 décembre 2022
PCSI

Devoir surveillé 4
Mathématiques
Correction
4 heures

Exercice 1. *Calculs divers*

1. Calculer le terme général à l'ordre n de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n - 4. \end{cases}$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $\quad y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\quad y'' - y = e^{2x} - e^x$

Exercice 2.
On considère deux suites réelles u et v définies par :

$$u_0 = 0 \text{ et } v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Calculer les termes u_1, u_2, v_1 et v_2.
2. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < v_n$.
3. Étudier la monotonie de chacune des suites u et v.
4. Montrer que la suite u vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{6}u_n$$

5. En déduire une expression de u_n dépendant de n puis une expression de v_n.

Exercice 3.
Pour toutes parties A, B de $\mathbb{R}$ on définit l'ensemble $A + B \subset \mathbb{R}$ comme suit :

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$$

1. **(a) Calculer $\{0; 1\} + \{1; 4\}$.**
   (b) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, que vaut $A + \mathbb{R}$? Montrer le résultat.
2. **Montrer que pour toutes parties non vides A, B, A' et B' de $\mathbb{R}$, si $A' \subset A$ et $B' \subset B$ alors**

$$A' + B' \subset A + B.$$

3. **Montrer que la somme est distributive sur la réunion. C'est à dire, pour tout $(A, B_1, B_2) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^3$, on a :**

$$A + (B_1 \cup B_2) = (A + B_1) \cup (A + B_2)$$

4. **Dans cette question on s'intéresse à l'intersection et la somme.**
   (a) Montrer que, pour toutes parties de $\mathbb{R}$, A, B_1, B_2 on a

$$A + (B_1 \cap B_2) \subset (A + B_1) \cap (A + B_2).$$

   (b) Montrer que l'autre inclusion n'est pas vraie en général.

Corrigé :

1. (a) On a, par défnition :
$$\{0;1\}+\{1;4\}=\{0+1;0+4;1+1;1+4\}$$
Ainsi on a
$$\boxed{\{0;1\}+\{1;4\}=\{1;2;4;5\}}$$
(b) Supposons que A soit une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrons que $A+\mathbb{R}=\mathbb{R}$.
Montrons la double inclusion.
• Soit $x\in A$, un tel x existe puisque A est non vide alors le réel $x+0$ appartient à $A+\mathbb{R}$. Ainsi si $x\in A$ alors $x\in A+\mathbb{R}$. On a donc
$$\boxed{A\subset A+\mathbb{R}}$$
• Soit maintenant un réel $y\in\mathbb{R}$.
Comme A est non nul, il existe un réel $a\in A$. On a $y-a\in\mathbb{R}$ par définition des opérations dans $\mathbb{R}$. On a alors
$$y=a+(y-a)$$
Le premier réel étant un élément de A et le deuxième est un réel. Donc $y\in A+\mathbb{R}$. On a ainsi :
$$\boxed{\mathbb{R}\subset\mathbb{R}+A}$$
Les deux inclusions étant vraie on en déduit :
$$\boxed{\mathbb{R}=A+\mathbb{R}}$$

2. Soit $(A,B,A',B')\in\Pr(\mathbb{R})^4$ tel que $A'\subset A$ et $B'\subset B$.
Soit $x\in A'+B'$. Par définition de la somme il existe deux réels $(a,b)\in A'\times B'$ tels que $x=a+b$. Comme on a supposé que $A'\subset A$ et $B'\subset B$ alors $a\in A$ et $b\in B$. On a donc bien $x\in A+B$. d'où
$$\boxed{A'+B'\subset A+B}$$

3. Soit $(A,B_1,B_2)\in\Pr(\mathbb{R})^3$ Montrons par équivalence l'égalité cherchée. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a les équivalences :
$$\begin{array}{rcl} x\in A+(B_1\cup B_2) & \iff & \exists(a,b)\in A\times(B_1\cup B_2)\quad x=a+b \\ & \iff & \begin{array}{rl} & \exists(a,b_1)\in A\times B_1\quad x=a+b_1 \\ \text{ou} & \exists(a,b_2)\in A\times B_2\quad x=a+b_2\end{array} \\ & \iff & x\in A+B_1\quad\text{ou}\quad x\in A+B_1 \\ & \iff & x\in(A+B_1)\cup(A+B_2)\end{array}$$
Ainsi on a donc bien
$$\boxed{A+(B_1\cup B_2)=(A+B_1)\cup(A+B_2)}$$

4. Soit $(A,B_1,B_2)\in\Pr(\mathbb{R})^3$.
(a) Soit $x\in A+(B_1\cap B_2)$. Par définition il existe $a\in A$ et $b\in B_1\cap B_2$ tel que $x=a+b$. Le réel $a+b$ appartient à $A+B_1$ et $A+B_2$ ainsi il appartient à $(A+B_1)\cap(A+B_2)$. On a donc bien :
$$\boxed{A+(B_1\cap B_2)\subset(A+B_1)\cap(A+B_2)}$$
(b) Soit $A=\mathbb{R}$, $B_1=\{1\}$ et $B_2=\{2\}$, d'après la question $1(b)$ on a
$$(A+B_1)\cap(A+B_2)=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$
Mais $B_1\cap B_2=\emptyset$ et donc
$$A+(B_1\cap B_2)=A+\emptyset=\emptyset$$
Ainsi en génral on a :
$$\boxed{A+(B_1\cap B_2)\neq(A+B_1)\cap(A+B_2)}$$

Exercice 4.

On considère la suite définie par :
$$\left\{\begin{array}{l} u_0>0 \\ \forall n\in\mathbb{N}u_{n+1}=\dfrac{1}{1+u_n}\end{array}\right.$$
On désigne par f la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 > 0$.
   On pose $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. On suppose $\alpha \in [0, \alpha]$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_{2n} \in [0, \alpha] \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \in [\alpha, 1].$$

   Étudier les variations de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (on étudiera le signe de $f \circ f(x) - x$).
3. Étudier le cas où $u_0 > \alpha$.

Problème I : Variation de la constante... à l'ordre 2 !

Dans ce problème, nous adaptons l'idée de la variation de la constante pour étudier des équation différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients *non constants.*

Partie A. Une équation différentielle.

Donner l'ensemble de solutions (définies sur $]0, +\infty[$) de l'équation différentielle

$$y' + \frac{3}{t}y = \frac{1}{t^4} \qquad (E_1)$$

Ï

Partie B. Variation de la constante.

On considère une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \qquad (E)$$

où a, b, c sont trois fonctions continues sur un intervalle I.
On note (E_0) l'équation homogène associée.

On suppose que l'on connaît une solution u de (E_0) qui ne s'annule pas sur I.

1. **Soit y une fonction définie sur I. Posons une fonction $\lambda = \dfrac{y}{u}$, de sorte que l'on a $y = \lambda u$. Montrer que y est deux fois dérivable sur I si et seulement si λ est deux fois dérivable sur I.**
2. **Montrer que y est solution de (E) si et seulement si λ' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 que l'on précisera (elle dépend de a, u et u', et de c).**

Partie C. Application.

Considérons l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = \frac{1}{t^3} \qquad (E_2)$$

que l'on cherche à résoudre sur $I =]0, +\infty[$.

1. **Exhiber une solution (simple) de $(E_{2,0})$, équation homogène associée à (E_2) qui ne s'annule pas sur I.**
2. **Calculer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^3}$**
3. **En utilisant la partie B, résoudre l'équation (E_2).**

Corrigé :

Partie A.

• Résolution de l'équation homogène.
La fonction $t \mapsto \frac{3}{t}$ admet pour primitive $3\ln$ sur $]0,+\infty[$. On a alors que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\left\{t \mapsto \lambda e^{-3\ln(t)},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t \mapsto \frac{\lambda}{t^3},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

• Recherche d'une solution particulière.
On utilise la méthode de la variation de la constante (classique). Pour cela, on pose $u : x \mapsto \frac{1}{x^3}$, et on cherche une solution de la forme $z = \lambda u$ où λ est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ à déterminer.

$$\begin{aligned} z' + \frac{3}{t}z &= (\lambda u)' + \frac{3}{t}(\lambda u) \\ &= \lambda' u + \lambda u' + \frac{3}{t}\lambda u \\ &= \lambda' u + \underbrace{\lambda\left(u' + \frac{3}{t}u\right)}_{=0}, \end{aligned}$$

où on a utilisé à la dernière ligne que u est solution de l'équation homogène. Ainsi, z est une solution de (E_1) si et seulement si

$$\forall t \in]0,+\infty[\ \ \lambda'(t)\cdot\frac{1}{t^3} = \frac{1}{t^4},$$

ce qui nous pousse à choisir $\lambda : t \mapsto \ln(t)$. On obtient la solution particulière

$$z : t \mapsto \lambda(t)u(t) = \frac{\ln(t)}{t^3}.$$

• L'ensemble des solutions de (E_1) est donc

$$\left\{t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^3} + \frac{\lambda}{t^3},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Partie B. Variation de la constante.

1. L'énoncé a posé que u était une solution de (E_0). Cela fait d'elle une fonction deux fois dérivable. Procédons par double-implication. Supposons que y soit deux fois dérivable. Alors $z = y/u$ est deux fois dérivable comme quotient. Réciproquement, supposons que z est deux fois dérivable. Alors, y est deux fois dérivable comme produit.
2. Supposons y et z deux fois dérivables (il suffit de le supposer pour l'un des deux). On dérive alors l'égalité $y = uz$, plus commode que $z = y/u$. On obtient

$$y' = uz' + u'z \quad \text{et} \quad y'' = u''z + 2u'z' + uz'',$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\iff y'' + ay' + by = c \\ &\iff u''z + 2u'z' + uz'' + a\left(uz' + u'z\right) + buz = c \\ &\iff z(\underbrace{u'' + au' + bu}_{=0}) + uz'' + \left(2u' + au\right)z' = c \\ &\iff z'' + \frac{2u' + au}{u}z' = \frac{c}{u}. \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si z' est solution de l'équation

$$Z' + \frac{2u' + au}{u}Z = \frac{c}{u}.$$

Partie C. Application.

1. On remarque que la fonction $u : t \mapsto t$ est solution de $(E_{2,0})$ sur $]0, +\infty[$.
2. Calcul d'une primitive de $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^3}$, fonction continue sur $]0, +\infty[$. Le théorème fondamental de l'analyse assure alors que
$$F : \begin{cases}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_1^t \frac{\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$
en est une primitive sur $]0, +\infty[$. Soit $t > 0$; à l'aide d'une intégration par parties, on calcule
$$\begin{aligned} F(t) &= \left[\ln(x) \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(t)}{2t^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^t \\ &= -\frac{\ln(t)}{2t^2} - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$
3. Soit y une fonction deux fois dérivable. Posons $z = y/u$. D'après la partie B, y est solution de (E_2) si et seulement si z' est solution de
$$Z' + \frac{2 \cdot 1 + \frac{1}{t} \cdot t}{t} Z = \frac{1}{t^3} \cdot \frac{1}{t},$$
c'est à dire
$$Z' + \frac{3}{t} Z = \frac{1}{t^4} \quad (E_1)$$
On a la bonne surprise (mais est-ce vraiment une surprise ?) de retrouver l'équation résolue en partie A. Ainsi, y est solution de (E_1) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z' : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^3} + \frac{\lambda}{t^3} = f(t) + + \frac{\lambda}{t^3}$. Il reste à déterminer la forme de z. La question précédente va nous aider à écrire les primitives d'une telle fonction : z' est solution de (E_0) si et seulement si il existe λ et μ deux réels tels que
$$z : t \mapsto F(t) - \frac{\lambda}{2t^2} + \mu.$$
Ainsi y est solution si et seulement si il existe λ et μ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad y(t) = u(t)z(t) = t\left(-\frac{\ln(t)}{2t^2} - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2t^2} + \mu\right).$$
Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme
$$\boxed{y : t \mapsto -\frac{\ln(t)}{2t} + \frac{\alpha}{t} + \beta t}$$
où α et β sont des constantes réelles.

Problème II : Une équation linéaire d'ordre 2 non linéaire.

On s'intéresse ici à la résolution dur $I =]0, +\infty[$ de l'quation différentielle (E) :
$$y'' - \frac{2x}{1 + x^2} y' + \frac{2}{1 + x^2} y = (1 + x^2)\ln x.$$
On notera (E_0) l'équation homogène associée.

I Calculs préliminaires

1. (a) **Montrer qu'il existe trois réels** a, b, c **tels que** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{1+x^2}$.

   (b) **En déduire une primitive de l'application** f **définie sur** I **par :** $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

2. **Donner une primitive sur** I **de l'application** g **définie sur** I **par :** $g(x) = (1-x^2)\ln x$
3. **Donner une primitive sur** I **de l'application** h **définie sur** I **par :** $h(x) = x \ln x$

II Résolution de l'équation sans second membre.

4. **Montrer que** $y_1 : x \mapsto x$ **est solution de** (E_0).
5. **Soit** $y : I \to \mathbb{R}$ **deux fois dérivable, on pose** z **l'application définie sur** I **par** $x \mapsto \dfrac{y(x)}{x}$.
   Montrer que y **est solution de** (E_0) **si et seulement si** z' **est solution de l'équation différentielle :**

$$(E') \qquad xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0.$$

6. **Résoudre l'équation différentielle** (E').
7. **Donner l'ensemble des solutions de** (E_0).

III Résolution de l'équation.

1. On chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1)$ où λ et μ sont des fonctions à déterminées deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I, \quad x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0$$

(a) Exprimer y_p' et y_p'' en fonction de λ et μ.

(b) Montrer que y_p est solution de (E) si et seulement si, pour tout $x \in I$,

$$\lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1)\ln x$$

(c) Déterminer λ' et μ' à l'aide des questions précédentes puis en déduire une solution particulière de (E).

2. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Corrigé : **I Calculs préliminaires**

1. (a) Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x(1+x^2)}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

En résolvant le système

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ c &= 0 \\ a &= 1 \end{cases}$$

On obtient le triplet $(1,-1,0)$. On vérifie que ces réels conviennent.
On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}}$$

(b) Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$ sur I est donc comme $x \geq 0$, $x \mapsto \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

2. Posons u et v les deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définie, pour tout $t \in I$, par :

$$\begin{aligned} u'(t) &= 1-t^2 \quad & v(t) &= \ln(t) \\ u(t) &= t - \frac{t^3}{3} \quad & v'(t) &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

On procède alors à une intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned} \int^x (1-t^2)\ln t \; \mathrm{d}t &= \left[\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\right]^x - \int^x \left(1 - \frac{t^2}{3}\right) \mathrm{d}t \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - \left[t - \frac{t^3}{9}\right]^x + C \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - \left(x - \frac{x^3}{9}\right) + C \end{aligned}$$

Ainsi l'application définie sur I par :

$$x \longmapsto \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - x + \frac{x^3}{9}$$

est une primitive de g

3. En procédant à une intégration par partie on obtient que l'application définie sur I par

$$x \longmapsto \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

est une primitive de l'application h.

II Résolution de l'équation sans second membre.

4. La fonction y_1 est deux fois dérivable sur I et, pour tout $x \in I$ on a :

$$y_1''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y_1'(x) + \frac{2}{1+x^2}y_1 = -\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

L'application y_1 est donc bien solution de (E_0).

5. Comme l'application y est deux fois dérivable alors l'application z est, elle aussi, deux fois dérivable sur I comme quotient de fonctions qui le sont et pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{array}{rrcl} & y(x) & = & xz(x) \\ \text{d'où} & y'(x) & = & z(x) + xz'(x) \\ \text{puis} & y''(x) & = & 2z'(x) + xz''(x) \end{array}$$

Ainsi y est solution de (E_0) sur I si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in I,\ y''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{2}{1+x^2} = 0 &\iff \forall x \in I,\ 2z'(x) + xz''(x) - \frac{2x}{1+x^2}(z(x) + xz'(x)) + \frac{2}{1+x^2}xz(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in I,\ xz''(x) + 2\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}z'(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in I, xz''(x) + \frac{2}{1+x^2}z'(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi y est solution de (E_0) si et seulement si z' est solution de (E').

6. Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où λ est un réel et A est une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$. Ainsi d'après la question $1-b$, l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E') est :

$$\boxed{\left\{x \mapsto \lambda\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) | \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

7. On a donc z' de la forme $x \mapsto \lambda(1 + \frac{1}{x^2})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi z est de la forme $x \mapsto \lambda x - \frac{\lambda}{x} + \mu$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble des solutions de (E_0) est donc

$$\boxed{\left\{x \mapsto \lambda(x^2-1) + \mu x | (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Partie III

1. (a) La fonction y_p est deux fois dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in I$, on a, en utilisant la relation imposée sur λ' et μ' :

$$y_p'(x) = \lambda'(x)x + \lambda(x) + \mu'(x)(x^2-1) + 2x\mu(x) = \lambda(x) + 2x\mu(x)$$

et pour tout $x \in I$:

$$y_p''(x) = \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x).$$

(b) On a y_p solution de (E) si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} (1+x^2)\ln x &= \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x) - \frac{2x}{1+x^2}(\lambda(x) + 2x\mu(x)) + \frac{2}{1+x^2}(\lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1)) \\ &= \lambda'(x) + 2x\mu'(x) + \lambda(x)\frac{-2x+2x}{1+x^2} + \mu(x)\frac{2+2x^2-4x^2+2x^2-2}{1+x^2} \\ &= \lambda'(x) + 2x\mu'(x) \end{aligned}$$

(c) Soit $x \in I$, le couple $(\lambda'(x), \mu'(x))$ est donc solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) & = & 0 \\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) & = & (1+x^2)\ln x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda'(x) + 2x\mu'(x) & = & (1+x^2)\ln x \\ -(x^2+1)\mu'(x) & = & -x(1+x^2)\ln x \end{array}\right.$$

On obtient ainsi $\big(\lambda'(x), \mu'(x)\big) = \big((1-x^2)\ln x, x\ln x\big)$. D'après les questions 2 et 3 on obtient :

$$\lambda : x \mapsto \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - x + \frac{x^3}{9}$$

$$\mu : x \mapsto \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

2. D'après ce qui précède, l'ensemble des solutions de (E) sur I est

$$\boxed{\left\{x \mapsto \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln x - x^2 + \frac{x^4}{9} + \frac{x^2(x^2-1)}{2}\ln x - \frac{x^2(x^2-1)}{4} + \lambda(x^2-1) + \mu x | (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$