Lycée Condorcet
PCSI

Décembre 2023

Étude asymptotique des suites réelles

1 Domination, négligeabilité

Définition 1.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée** par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe un rang N et une suite **bornée** $(\lambda_n)_{n\geq N}$ pour lesquels, pour tout $n \geq N$, $u_n = \lambda_n v_n$. On note alors $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$. Cette notation se lit "u_n est un grand O de v_n".

  Dans le cas où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, s'il exsite un rang N et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui **converge vers** 0 et pour lesquels, pour tout $n \geq N$, $u_n = \varepsilon_n v_n$. On note alors $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$. Cette notation se lit "u_n est un petit o de v_n".

  Dans le cas où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

- **Remarques**

1. Il résulte facilement de la définition que l'on a :

$$u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n) \iff |u_n| \underset{n\to\infty}{=} o\big(|v_n|\big).$$

2. Vérifier que si $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(1)$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Réciproquement, si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(1)$. Ainsi :

$$u_n \underset{n\to\infty}{=} o(1) \iff u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple 1

1. On a $\dfrac{\cos(n)+4}{n^2} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $\cos(n)+4$ est bornée.
2. On a : $n^3\sin(n) = o(n^5)$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\sin(n)}{n^5} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$.
3. Vérifier que $\dfrac{1}{n} = o(1)$, $\dfrac{1}{n^2} = o(\dfrac{1}{n})$, $\dfrac{1}{n^3} = o(\dfrac{1}{n^2})$.
   Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui soient négligeables par rapport à $(\dfrac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui vérifient $\dfrac{1}{n^2} = o(u_n)$ et $\dfrac{1}{n^2} = o(v_n)$, et telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne soit pas négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ni $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ devant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Vérifier que $1 = o(n)$, $n = o(n^2)$, $n^2 = o(n^3)$.
   Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $n = o(u_n)$ et $u_n = o(n^2)$. Trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$.

- **Exercice**. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $v_n = o(u_n)$. Montrer que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

- **Notation**. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites réelles, écrire que $u_n = v_n + o(w_n)$ signifie que $u_n - v_n = o(w_n)$. Par exemple :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2}), \quad \frac{1}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2\ln(n)} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Proposition 2 (Transitivité)**.**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites.

1. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Proposition 3 (Opérations)**.**

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $a_n = O(b_n)$, alors $\lambda a_n = O(b_n)$.
   Si $a_n = o(b_n)$, alors $\lambda a_n = o(b_n)$.

2. Si $a_n = O(b_n)$ et si $\lambda \neq 0$, alors $a_n = O(\lambda b_n)$.
   Si $a_n = o(b_n)$ et si $\lambda \neq 0$, alors $a_n = o(\lambda b_n)$.

3. Si $a_n = O(c_n)$ et $b_n = O(c_n)$, alors $a_n + b_n = O(c_n)$.
   Si $a_n = o(c_n)$ et $b_n = o(c_n)$, alors $a_n + b_n = o(c_n)$.

4. Si $a_n = O(b_n)$ et $c_n = O(d_n)$, alors $a_n c_n = O(b_n d_n)$.
   Si $a_n = o(b_n)$ et $c_n = o(d_n)$, alors $a_n c_n = o(b_n d_n)$.

5. Si $a_n = O(b_n)$ alors $a_n c_n = O(b_n c_n)$.
   Si $a_n = o(b_n)$ alors $a_n c_n = o(b_n c_n)$.

Proposition 4 (Croissances comparées des suites usuelles).

1. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$.
2. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta > 0$, $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$.
3. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta > 0$, $\dfrac{1}{n^\beta} = o(\dfrac{1}{(\ln n)^\alpha})$.
4. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $n^\alpha = o(e^n)$. Plus généralement :
   — pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta > 0$, $n^\alpha = o(e^{\beta n})$;
   — pour tout $(\alpha, q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|q| > 1$, $n^\alpha = o(q^n)$.
5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{-n} = o(\dfrac{1}{n^\alpha})$. Plus généralement :
   — pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta > 0$, $e^{-\beta n} = o(\dfrac{1}{n^\alpha})$;
   — pour tout $(\alpha, q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|q| < 1$, $q^n = o(\dfrac{1}{n^\alpha})$.
6. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$, $e^{\alpha n} = o(e^{\beta n})$.
7. Pour tout $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|q_1| < |q_2|$, $q_1^n = o(q_2^n)$.
8. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{\alpha n} = o(n!)$.
9. Pour tout $q \in \mathbb{R}$, $q^n = o(n!)$.
10. $n! = o(n^n)$.

2 Suites équivalentes

Définition 5.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **équivalentes** s'il existe un rang N et une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ congergente de limite 1 pour lesquels, pour tout $n \geq N$, $u_n = \eta_n v_n$. Dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, ou encore $u_n \sim v_n$.

Dans le cas où v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, il est équivalent d'exiger que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

• **Remarque**

Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $|u_n| \underset{n\to\infty}{\sim} |v_n|$. La réciproque est fausse : trouver un contre-exemple.

Exemple 2

1. $n + \ln(n) \sim n, \quad n + 1 \sim n, \quad n^2 + n\sqrt{n} + n \sim n^2$.
2. $\dfrac{1}{\ln(n)} \sim \dfrac{\ln(n)}{(\ln n)^2 + 5}, \quad \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{n^5 + 3n^3}{n^6 + \ln(n) + 2}, \quad \dfrac{1}{n^3} \sim \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^{7/2}}$.
3. $\ln(1 + \dfrac{1}{n}) \sim \dfrac{1}{n}, \quad \sin(\dfrac{1}{n^{3/2}}) \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$.
4. Trouver des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
5. Trouver des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$ est donné.
6. Trouver des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_n \sim v_n$ et telles que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit divergente de seconde espèce.

Proposition 6.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites , c'est à dire, pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a

1. $u_n \sim u_n$ ($\sim$ est réflexive).
2. si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$ ($\sim$ est symétrique).
3. si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$ ($\sim$ est transitive).

Proposition 7.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

1. On a $u_n \sim v_n \quad \Rightarrow \quad u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
2. On a : $\Big(u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n\Big) \iff \Big(u_n - v_n = o(v_n)\Big) \iff \Big(u_n = v_n + o(v_n)\Big)$.
3. Si $v_n \underset{n\to\infty}{=} o(u_n)$ alors $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.

Exemple 3

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

$$(1) \quad u_n = 2n^4 - n^3 + n + 1 \quad (2) \quad u_n = 2\sqrt{n} + \cos(n) - (\ln n)^2 \quad (3) \quad u_n = 5^n + n^{12}$$

Proposition 8.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

1. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \underset{n\to\infty}{=} o(w_n)$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(w_n)$.
2. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et si $w_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$, alors $w_n \underset{n\to\infty}{=} o(u_n)$.

Proposition 9.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles. On suppose que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ et que $c_n \underset{n\to\infty}{\sim} d_n$. Alors :

1. $a_n c_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n d_n$;
2. si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang, alors $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang, et on a :
$$\frac{1}{c_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{d_n} \quad \text{et} \quad \frac{a_n}{c_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{b_n}{d_n}.$$

Proposition 10.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Alors

$$u_n^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} v_n^\alpha.$$

Le résultat reste valable plus généralement si $\alpha \in \mathbb{R}$, mais il faut alors supposer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs strictement positives, de sorte que les suites $(u_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soient définies.

Proposition 11 (Opérations).

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatres suites et soit f une fonction éventuellement continue sur $\mathbb{R}$.
Supposons que $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$:

1. En général les suites $u + w$ et $v + x$ ne sont pas équivalentes, de même $u + x$ et $w + x$ ne sont, en général, pas équivalentes.
2. En général les suites $f(u)$ et $f(v)$ ne sont pas équivalentes.
3. En général les suites u^n et v^n ne sont pas équivalentes.

Exemple 4

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

$$(1)\quad u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \qquad (3)\quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad (3)\quad u_n = n + \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}$$

Proposition 12.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff u_n \sim \ell$$

Proposition 13.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \sim v_n$.

1. u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.
2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Exemple 5

Trouver un équivalent simple de chacune des suites suivantes et donner leur limite :

$$\begin{array}{lll}
(1)\quad u_n = (n + 3\ln n)e^{-(n+1)} & (3)\quad u_n = \dfrac{2^{2n} + n3^n}{2^{2n} - n3^n} & (5)\quad u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2+n+1}} \\
(2)\quad u_n = 3^n - n^2 2^n & (4)\quad u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1} & (6)\quad u_n = \dfrac{n! + e^n}{2^n + 3^n}
\end{array}$$

Exemple 6

Vérifier que $\dfrac{\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right)^{5/2} \ln(n)\sqrt{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \sin(\frac{1}{n^3})} \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.