Lycée Condorcet
PCSI

Suites réelles (2)

Exercice 12.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \textbf{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

1. **Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$.**
2. **Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.**
3. **En déduire que les suites convergent vers la même limite l avec $l \leq -1$.**
4. **Quelle est la limite de $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}}$.**

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a par définition de u_n et v_n :

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} - \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\Big) \\ &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a, par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1 - 2(n+1) + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{-\Big(n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n\Big)}{\sqrt{n+1}} \\ &= -\frac{\Big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\Big)^2}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Le carré d'un réel étant toujours positif et la racine carrée aussi on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a, par définition de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\Big) \\
&= \frac{1}{n+1} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} \\
&= \frac{1 - 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} + 2(n+1)}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{n+2 - 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} + n + 1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

3. D'après les questions 1 et 2 les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite. Notons l cette limite.
   Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \leq u_1$, or $u_1 = -1$. Ainsi à partir du rang 1, -1 est un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi inférieure à -1.
4. Notons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_n \times \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} - 1$$

   Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est bornée. De plus la suite $\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 ainsi le produit $\left(u_n \times \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Ce qui implique que $\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}}$ tend vers 1.
   Nous avons ainsi montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 13.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) **Étudier la monotonie de H_n.**
   (b) **Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.**
   (c) **En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{2^n} \geq \frac{n}{2}$.**
   (d) **En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.**

2. (a) **Démontrer que pour tout réel x tel que $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$. Pour quelles valeurs de x y-a-t'il égalité ?**
   (b) **On définit deux suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ ainsi :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = H_n - \ln(n+1) \text{ et } w_n = H_n - \ln(n).$$

   Utiliser le résultat du (a) pour démontrer que les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
   (c) **En déduire l'existence d'un réel γ tel que**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) - \gamma \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Justifier que $\gamma > 0$. Ce nombre γ s'appelle la constante d'Euler.

Correction :

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} H_{n+1} - H_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} > 0$, ainsi la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, nous allons majorer $\dfrac{1}{k}$.
Soit $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a alors :

$$\begin{aligned} & k \leq 2n \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$ on peut sommer et obtenir :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$$

Or on a les égalités :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 \\ &= \frac{1}{2n}\Big(2n - (n+1) + 1\Big) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons A_n l'assertion

$$H_{2^n} \geq \frac{n}{2}$$

Montrons par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par définition on a :

$$H_1 = 1 \geq 0$$

L'assertion A_0 est donc vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons A_n vraie. On a donc :

$$H_{2^n} \geq \frac{n}{2}$$

Mais par définition de H_n on a :

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}} &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2\times 2^n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Le premier terme est majoré par hypothèse de récurrence par $\frac{n}{2}$. Pour le deuxième on applique le résultat démontré dans la question précédente avec 2^n. Ainsi cette somme est majorée par $\frac{1}{2}$. On obtient ainsi

$$H_{2^{n+1}} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

On a ainsi montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$H_{2^n} \geq \frac{n}{2}$$

(d) On sait que $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$ donc par théorème de comparaison on déduit que $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

2. (a) Faire une étude de fonction.

(b) Étudions la limite de $v_n - w_n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{array}{rcl} v_n - w_n & = & H_n - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \\ & = & -(\ln(n+1) - \ln(n)) \\ & = & -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ & = & -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{array}$$

Ainsi on a $\lim_{n \to +\infty} v_n - w_n = 0$.

Étudions maintenant la monotonie des suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} - v_n & = & H_{n+1} - \ln(n+2) - (H_n - \ln(n+1)) \\ & = & \dfrac{1}{n+1} - (\ln(n+1+1) - \ln(n+1)) \\ & = & \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \end{array}$$

Or $\frac{1}{n+1} > -1$ donc l'inégalité démontrée en a s'applique on a donc à $\frac{1}{n+1}$.

$$\begin{array}{rl} & \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+1} \\ \iff & \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \geq 0 \end{array}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante.
Un raisonnement similaire montre que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
Les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont donc bien adjacentes.

(c) Les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant adjacentes elles convergent vers la même limite. Notons la γ. La suite $\left(w_n - \gamma\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers 0. On a donc bien

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) - \gamma \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante elle est minorée par son premier terme. Or $v_1 = 1 - \ln 2 > 0$ ($\ln 2 \simeq 0,69$). Donc on a bien $\gamma > 0$.