Lycée Condorcet
PCSI

Décembre 2023

Suites réelles (2)

1 Limites de suites

Exercice 1.
Les suites suivantes, définies par leur terme général u_n ($n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$, ou encore $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ suivant les cas), sont-elles convergentes ? Dans le cas où elles convergent, préciser leur limite.

a) $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$ b) $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ c) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor 2kx \rfloor$ (où $x \in \mathbb{R}$ est fixé)

d) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ e) $u_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ f) $u_n = n\sin(\dfrac{1}{n})$ g) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$

h) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ i) $u_n = \left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}$ j) $u_n = 3^n e^{-3n}$ k) $u_n = \dfrac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$

Exercice 2.
Soit u la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+5u_n}$ et $u_0 > 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$. En déduire la monotonie de u.
2. La suite est-elle convergente ? Calculer sa limite.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{5}$ puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$. Retrouver le résultat de 2.

Exercice 3.
Soit v la suite définie par $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2}(1+v_n^2)$.

1. Déterminer la monotonie de la suite.
2. Montrer que la suite v ne peut pas être majorée. En déduire la limite de v_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 4.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
2. En déduire le comportenement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

2 Suites définies implicitement

Exercice 5.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ et (E) l'équation $\tan x = x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans I_n.
2. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et montrer que $(\frac{1}{n\pi}x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
3. Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction $f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution positive, qu'on notera u_n.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(1 - u_n^n) = 1 - u_n$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante.
5. Après avoir justifié son existence, calculer $\lim u_n$.

Exercice 7.
Dans chacune des situations suivantes, déterminer les variations de la fonction sous-jacente, la position de son graphe par rapport à la droite d'équation $x = y$. Puis étudier en fonction de u_0 la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

a) $u_{n+1} = u_n - \ln u_n$ b) $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ c) $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$ d) $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^2}{4}$

3 Suites extraites

Exercice 8.

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Est-elle convergente ?
2. Même question pour la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{n}$.

Exercice 9.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ne tendant pas vers $+\infty$.

1. La suite u est elle nécessairement majorée.
2. Montrer que u admet une sous-suite majorée.

Exercice 10.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que ses trois suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes. Montrer que u converge.

Exercice 11.
On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

1. (a) Expliciter sa sous-suite $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que sa sous-suite (u_{n^2+2n}) est convergente et calculer sa limite.
2. Que peut-on en déduire sur le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? sur ses éventuels maximum, minimum, bornes supérieure et inférieure ?

4 Suites adjacentes

Exercice 12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
3. En déduire que les suites convergent vers la même limite l avec $l \leq -1$.
4. Quelle est la limite de $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 13.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Étudier la monotonie de H_n.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{2^n} \geq \frac{n}{2}$.
   (d) En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

2. (a) Démontrer que pour tout réel x tel que $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$. Pour quelles valeurs de x y-a-t'il égalité ?
   (b) On définit deux suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ ainsi :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = H_n - \ln(n+1) \text{ et } w_n = H_n - \ln(n).$$
   Utiliser le résultat du (a) pour démontrer que les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
   (c) En déduire l'existence d'un réel γ tel que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) - \gamma \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Justifier que $\gamma > 0$. Ce nombre γ s'appelle la constante d'Euler.

Exercice 14. Moyenne arithmético-géométrique

Soient a et b deux réels strictement positifs.

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}. \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tous réels x et y positifs, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $0 < v_n \leq u_n$.
3. Étudier les monotonies de (u_n) et (v_n) à partir du rang $n = 1$.
4. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite strictement positive.
   On définit
   $$M(a,b) = \lim u_n = \lim v_n.$$
5. Que vaut $M(a,a)$?

Exercice 15. (difficile)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies pour $n \leq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note e leur limite commune.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}$.
3. (*) En déduire que e est un nombre irrationnel (on pourra procédé par l'absurde).

5 Suites complexes

Exercice 16.
Étudier la convergence des suites complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + iy_n$ et $\begin{cases} (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n - y_n) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n) \end{cases}$
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 1$.

Exercice 17.
Soit θ un réel vérifiant $-\pi \leq \theta \leq \pi$).
On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = re^{i\theta}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

On désigne par r_n le module de z_n et par θ_n l'argument (s'il est défini) de z_n tel que $-\pi \leq \theta_n \leq \pi$.

1. Effectuer la construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.
2. Exprimer r_{n+1} et $\theta_n n + 1$ en fonction de r_n et de θ_n, et en déduire que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, trouver sa limite.
3. Étudier la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$, et en déduire r_n.
4. En déduire que la suite $(r_n)_{n_i n\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite. Même chose avec la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.