16 janvier 2024

Devoir surveillé 5
Mathématiques

3 heures

Calcul divers

1. Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers + l'infini de :

1. $e^{2n} + 2n^4$ 2. $\ln(n+1) - \ln(n)$ 3. $\sqrt{\dfrac{2}{n^4} + \dfrac{2}{n^2}}$ 4. $\dfrac{n\ln(n^2+1)+2n}{(n+1)^2\ln(n^5+1)}$ 5. $\ln\left(1 - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

2. On étudie dans cet exercice la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

(a) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

(b) En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(c) En déduire un encadrement de u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Montrer : $\dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \to 2$.

3. Soit une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \geq -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}.$$

(a) Justifier brièvement que (u_n) est bien définie.

(b) Supposons $u_0 = 1$. Étudier la monotonie de (u_n). Démontrer que cette suite est majorée. Et montrer qu'elle converge vers une limite que vous déterminerez.

(c) Supposons $u_0 = 2$. Mêmes questions que ci-dessus.

Une suite récurrente

Soit $u = (u_n)$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}.$$

1. Justifier que la suite u est bien définie.
2. Étudier la monotonie de la suite u. Démontrer que

$$u_n \longrightarrow +\infty.$$

   On pourra raisonner par l'absurde.
3. Pour tout entier naturel k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k. En déduire la limite de $u_{k+1}^2 - u_k^2$ lorsque k tend vers $+\infty$.
4. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n^2}{4}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, $v_{k+1} - v_k \geq 1$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \geq n$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel k, $v_{k+1} - v_k \leq 1 + \frac{1}{k}$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x) \leq x$.
   En déduire que pour tout entier naturel $k \geq 2$: $\dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$
   (d) Déduire des questions b) et c) que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$v_n - v_0 \leq n + \frac{1}{v_0} + 1 + \ln(n).$$

5. Montrer que $v_n \sim n$ et $u_n \sim 2\sqrt{n}$.

Un développement asymptotique

Dans cet exercice, on considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}.$$

1. Étude de la nature de (S_n).
   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   (b) Soit $k \geq 4$. Montrer que

$$\forall x \in [k-1, k] \quad \frac{\ln(x)}{x} \geq \frac{\ln(k)}{k} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [k, k+1] \quad \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\ln(k)}{k}.$$

   (c) Montrer que, pour tout entier $k \geq 4$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(d) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A, B et C telles que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on ait :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$

(e) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Recherche d'un équivalent de S_n.

(a) Montrer que $\ln^2(n+1) \sim \ln^2(n)$.

(b) En déduire que $S_n \sim \dfrac{\ln^2(n)}{2}$.

3. Étude asymptotique de la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

(a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(b) En déduire que la suite u converge.
Dans la suite de l'exercice, la limite de u sera notée ℓ.

4. Une application. On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}.$$

(a) Prouver que pour tout entier naturel n non nul, on a

$$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(b) On admet qu'il existe un réel γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

En déduire que la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

(c) En déduire que $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

(d) Que peut-on dire au sujet de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?