Exercice 15

erreur de l'énoncé ?

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. $\forall n \geq 2$, $\displaystyle u_n - u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n!} \right)$$

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n!} > 0$$

D'où $\forall n \geq 2$, $u_n \geq u_{n-1}$

* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n \geq 1$

Ou $\forall n \geq 1$, $\displaystyle u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

De plus, $\forall n \geq 2$

$$v_n - v_{n-1} = u_n + \frac{1}{n \cdot n!} - \left(u_{n-1} + \frac{1}{(n-1)(n-1)!} \right)$$

$$= \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!} - \frac{1}{(n-1)(n-1)!}$$

$$= \frac{n(n-1) + (n-1) - n \times n}{n! \cdot n \cdot (n-1)}$$

$$= \frac{n^2 - n + n - 1 - n^2}{n(n-1)\,n!}$$

$$v_n - v_{n-1} = \frac{-1}{n(n-1)\,n!} < 0$$

* Ainsi, $\forall n \geq 2$, $v_n < v_{n-1}$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, montrons alors que $v_n - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\forall n \geq 1$ $\displaystyle v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$ Or $n! \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

D'où, $v_n - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi, par définition $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Alors, elles sont convergentes et ont même limite ℓ $(\ell \in \mathbb{R})$ (Proposition 25)

2. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $e \in \mathbb{R}$
alors $\forall n \geqslant 1$, $u_n \leqslant e$ (Proposition 23)

De même, comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $e \in \mathbb{R}$
alors $\forall n \geqslant 1$, $v_n \geqslant e$

Ainsi $\forall n \geqslant 1$, $u_n \leqslant e \leqslant v_n$

$$\Leftrightarrow \quad u_n \leqslant e \leqslant u_n + \frac{1}{n.n!}$$

car $n \geqslant 1$
donc $n! > 0$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{u_n . n! \leqslant e.n! \leqslant u_n . n! + \frac{1}{n}}$$

3. Montrons par l'absurde que e est un nombre irrationnel.

Supposons que e est un nombre rationel ie $e = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

D'après la question 2, On a,

$$\cancel{\forall q \geqslant 1}, \quad u_q . q! \leqslant e . q! \leqslant u_q . q! + \frac{1}{q}$$

Or, pour tout $k \leqslant q$, $\frac{q!}{k!}$ est un entier
alors $u_q . q!$ est un entier

De plus $q! \frac{p}{q}$ est un entier

et $\forall q \geqslant 1$ $\quad u_q . q! \leqslant e.q! \leqslant u_q . q! + \frac{1}{q} < u_q . q! + 1$

Ainsi $\quad u_q . q! \leqslant e.q! \leqslant u_q . q! + 1$

Donc $eq!$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs et est lui-même un entier

Il y a une contradiction donc e est nombre irrationnel.