Lycée Condorcet
PCSI

15 novembre 2024

Devoir surveillé 4 Problèmes
Mathématiques

2 heures

Problème I

On note j le complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Nous allons étudier certaine propriété de ce complexe.

Partie 1. Propriétés de j

1. Vérifier que $j^3 = 1$, que $j^2 = \bar{j}$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
2. Donner les solutions de l'équation $z^3 = 1$, les exprimer en fonction de j.
3. Soient p et q deux entiers naturels non nuls, on suppose que le premier est multiple de 3 et le deuxième multiple de 6. On veut calculer les solution de l'équation

$$(E) : z^p = 1 \text{ et } (z+1)^q = 1$$

   (a) Montrer que j et j^2 sont solutions.
   (b) Montrer que ce sont les seules.
   (c) Question bonus (difficile) et si p n'est pas multiple de 3 ou q n'est pas multiple de 6 ?

Partie 2. Ecriture d'un complexe dans $1, j$

1. Démontrer que tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b deux réels peut s'écrire de manière unique sous la forme $x + jy$ avec x et y deux réels. Exprimer x et y en fonction de a et b, puis a et b en fonction de x et y.
2. Soient $z = x + jy \neq 0$ et $z' = x' + jy'$ (avec x, x', y et y' des réels) deux nombres complexes. Mettre sous la forme $A + Bj$ (avec A et B deux réels) chacun des nombres complexes suivants :

$$z + z', \quad zz', \quad jz, \quad , j^2 z, \quad \bar{z}, \quad |z|^2, \quad z^{-1}.$$

Partie 3. Combinaisons linéaires entières

On pose dans cette partie $E = \{x + jy, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des complexes z tels qu'il existe $z' \in E$ tel que $zz' = 1$.

1. Vérifier que la somme, la différence et le produit de deux éléments de E est un élément de E.
2. Montrer que, pour tout $z \in E$, $|z|^2$ est un entier positif ou nul.
3. Montrer l'équivalence :

$$z \in \mathcal{A} \iff z \in E \text{ et } |z| = 1$$

4. En déduire que $\mathcal{A}$ est constitué de six éléments à déterminer en fonction de j ou de puissances de j.

Problème II

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^2}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\ \mathrm{d}t$$

Partie 1. Convergence de la suite $(J_k/I_k)_{k\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\quad t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$.
2. Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la double inégalité : $\quad 0 \leq J_k \leq \dfrac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} = \dfrac{2k+1}{2k+2} I_k$.
4. En déduire la limite de $\dfrac{J_k}{I_k}$ quand k tend vers $+\infty$.

Partie 2. Convergence et limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ exprimer I_k en fonction de J_k et J_{k-1}.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \dfrac{J_k}{I_k} = \dfrac{1}{2k^2}$.
3. Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Établir les inégalités suivantes pour tout entiers $k \geq 2$:

   $$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

   En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ puis de $S - S_n$ et montrer que :

   $$0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$$

   Autrement dit $S_n + \frac{1}{n}$ constitue une valeur approchée de S à $\frac{1}{n^2}$ près.
5. Écrire un algorithme calculant et affichant une approximation de S à 10^{-6} près.