

Exercice 4:

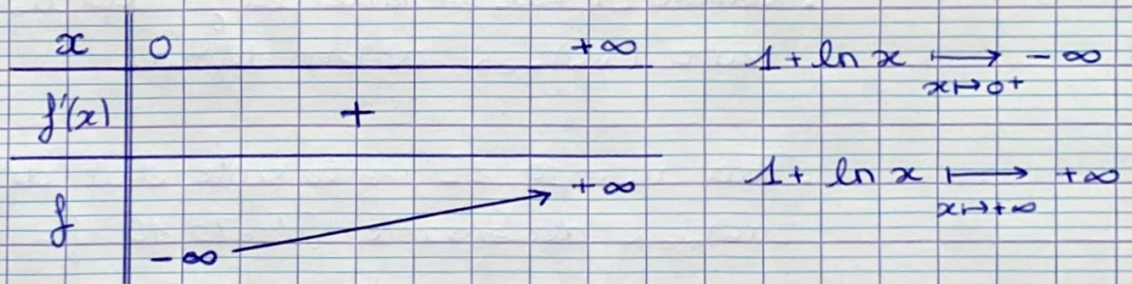
c) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par:
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$

Notons f la fonction sous-jacente définie par:

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 + \ln(x)$$

f est dérivable et
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x}$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) > 0$



f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Notons de plus que $f(1) = 1 + \ln(1) = 1$. On a donc d'après le théorème de la bijection:

$f([0; 1[) =]-\infty; 1[$ et $f([1; +\infty[) = [1; +\infty[$
 $[1; +\infty[$ est donc stable par f

Étudions la position du graphe de f , C_f , par rapport à la droite d'équation $x = y$. Posons g , la fonction définie par:

$$g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) - x$$

g est dérivable comme somme de fonctions dérivables.

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \frac{1}{x} - 1$

$$\begin{aligned} g'(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x &\leq 1 \end{aligned}$$

On note que

$$g(1) = 1 + \ln(1) - 1 = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
g		↗ ↘	
$g(x)$		-	-
position	C_g est en dessous de $x=y$		

- Comme $[1, +\infty[$ est stable par f , pour $u_0 \in [1, +\infty[$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
- Pour $u_0 \in]0, 1[$, si la suite était définie, on aurait $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante ($\forall x \in]0, 1[, f(x) - x < 0$) et comme f n'admet pas de point fixe inférieur à 1, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendrait vers $-\infty$. Il existerait alors un rang à partir duquel $u_n \leq e^{-1}$ donc $u_{n+1} \leq 0$ et u_{n+2} ne serait alors pas défini.

Ainsi, la suite n'est définie que si $u_0 \in [1, +\infty[$

Soit $u_0 \in [1, +\infty[$

$[1, +\infty[$ est stable par f , f est croissante sur $[1, +\infty[$ et $f(u_0) - u_0 \leq 0$ donc la suite est décroissante et minorée par 1.

Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l et l vérifie $f(l) = l$ (prop 26)

Comme $f(1) = 1$, si $u_0 \geq 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers 1.