Problème ensemble

1(a) Soit $X \subset E$, $f(X) = (X \cap \emptyset) \cup B$

$$= \emptyset \cup B$$
$$= B$$

Ainsi dans le cas où $A = \emptyset$ f est constante égale à B.

1b) Soit $X \subset E$, on a alors :

$$f(X) = (X \cap A) \cup E$$
$$= E$$

Ainsi, si $B = E$ la fct° f est constante égale à E.

2. On a les égalités suivantes :

- $f(\emptyset) = (\emptyset \cap A) \cup B$
$$= \emptyset \cup B$$
$$= B$$

On a donc $\boxed{f(\emptyset) = B}$

- $f(A) = (A \cap A) \cup B$

Ainsi $\boxed{f(A) = A \cup B}$

- $f(B) = (B \cap A) \cup B$

On $A \cap B \subset B$ donc $(A \cap B) \cup B = B$

Ainsi $\boxed{f(B) = B}$

Enfin $f(E) = (E \cap A) \cup B$
$= A \cup B$

on a donc $\boxed{f(E) = A \cup B}$

3a) Notons que $A \subset A \cup B$ ainsi

$$A \cap (A \cup B) = A$$

De même $A \cap B \subset B$ donc

$$(A \cap B) \cup B = B$$

3b) Tout d'abord comme $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$
$f \circ f$ est bien défini et $f \circ f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$.
Soit $X \subset E$ on a les égalités suivantes :

$ff(X) = f((X \cap A) \cup B)$ par définition de f

$= (((X \cap A) \cup B) \cap A) \cup B$ par définition de f

$= (((X \cup B) \cap (A \cup B)) \cap A) \cup B$ par distributivité de $\cup$ sur $\cap$

$= ((X \cup B) \cap (A \cup B) \cap A) \cup B$ associativité de $\cap$

$= ((X \cup B) \cap A) \cup B$ question 3a)

$= ((X \cap A) \cup (B \cap A)) \cup B$ distributivité de $\cap$ sur $\cup$

$= ((X \cap A) \cup (B \cap A) \cup B)$ associativité de $\cup$

$= (X \cap A) \cup B$ question 3a)

$= f(X)$ définition de f.

4 a) Pour mq ces 3 points sont equivalents nous allons mq $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$

Sq g soit injective et mq g est surjective.

Soit $y \in E$ par hypothèse $g(y) = g(g(y))$

Mais comme g est injective $y = g(y)$

ainsi y est un antécédent de lui m par g.

donc g est surjective.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Sq g soit surjective et montrons qu'il s'agit de l'identité de E.

Soit $x \in E$, comme g est surjective il existe $x_1 \in E$ tel que $g(x_1) = x$ on a alors

$$g(x) = g(g(x_1))$$

$$= g(x_1) \quad \text{par hypothèse } (g \circ g = g)$$

$$= x \quad \text{par definition de } x_1$$

On a bien pour tout $x \in E$

$$g(x) = x$$

La fct° g est l'identité..

$(iii) \Rightarrow (i)$ ~~Soit~~ Si g est l'identité elle est bien sûr injective.

4b) Supposons que f soit bijective, dans ce cas comme $f \circ f = f$ (question 3(b)) alors d'après 4a) $f = Id_E$. Mais à la question 2. nous avons vu que $f(\emptyset) = B$ et $f(E) = A \cup B$ donc si $f = Id_E$ alors $B = \emptyset$ et $A \cup B = E$ d'où $A \cup \emptyset = E$ ssi $A = E$.

Ainsi $B = \emptyset$ et $A = E$ est une condition necessaire à f bijective.

Reciproquement sq $B = \emptyset$ et $A = E$.
Soit $X \subset E$ on a alors :

$$f(X) = (X \cap E) \cup \emptyset = X$$

D'où $f = Id_{\mathcal{P}(E)}$ ainsi f est bijective.

— La condition $A = E$ et $B = \emptyset$ est ainsi necessaire et suffisante pour que f soit bijective