Exercice 14 : Moyenne arithmético-géométrique :

1) Remarquons que, pour tous réels x et y positifs on a

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$\iff x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$\iff \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Pour tout $n\in N$

2) Notons $P(n)$ l'assertion suivant :

" $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ".

et montrons $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Initialisation :

$u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$

donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$ vraie.

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$$

On a un>0 et vn>0 alors :

Comme

Par hypothèse de récurrence $u_n + v_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$

De même, par définition de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

Donc par HR v_{n+1} bien défini.
Et par st croissance de la fonction racine $v_{n+1}>0$

et par hypothèse de récurrence on obtient que $v_{n+1} > 0$

Par principe de récurrence on a bien $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les deux suites sont donc bien définies et toujours positives.

strictement

n n'est pas défini ! Plutôt commencer par : "Soit n\in \N*"

On applique le résultat de la question 1 avec $x = v_{n-1}$ et $y = u_{n-1}$. On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sqrt{u_{n-1} v_{n-1}} \leq \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$$

$$v_n \leq u_n$$

On a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 < v_n \leq u_n$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} \leq u_n$$

Car d'après la question 2, $v_n \leq u_n$, on a alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus

Par croissance de la fonction racine et comme vn et un sont positifs :

$$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n v_n} = v_n$$

Donc de la même façon, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Soit n\in \N

4) D'après la question 1, on a

$$u_{n+1} - v_{n+1} \geq 0$$

De plus,

par définition

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{v_n u_n}}{2}$$

Or d'après la question 2 : $0 < v_n \leq u_n$ et par croissance de la fonction racine carrée on a

$\sqrt{u_n v_n} \geq v_n$.

On obtient ainsi

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

Ici tu pourrais faire directement la récurrence ! Avec ce que tu viens d'écrire dans l'hérédité.

Par récurrence, on généralise ce résultat par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - v_0)$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}(u_0 - v_0) = 0$

donc d'après le théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$

On en déduit donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, elles convergent vers la même limite

5) On cherche $M(a,a)$ et on considère ainsi les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = a \end{cases} \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$$

On montre immédiatement par récurrence que ces deux suites sont les suites constantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = a$ et $v_n = a$

En effet ; $u_0 = a$ et $v_0 = a$

Soit $n \in \mathbb{N}$, suppons que $u_n = a$ et $v_n = a$ et montrons que $u_{n+1} = a$ et $v_{n+1} = a$:

Par définition on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{a} = \frac{2a}{a} = a$$

et $$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{a^2} = a$$

Donc par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = a \quad \text{et} \quad v_n = a$$

Donc on en déduit

$$M(a,a) = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = a$$