

Exercice 8

Consigne

1. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
Est-elle convergente ?
2. Même question pour la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, v_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{n}$.

Résolution

1.

Soient $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite extraite de u définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{4n}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite extraite de u définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_{8n+2}$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n &= \sin(\pi n) + \cos(2n\pi) = 1 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad w_n &= \sin\left(\frac{(8n+2)\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{(8n+2)\pi}{2}\right) \\ w_n &= \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(4n\pi + \pi) \\ w_n &= 0 \end{aligned}$$

Les suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas convergentes vers la même limite donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

2.

On note $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite extraite de v_n tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v'_n = v_{6n}$

On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v'_n = \sin(2\pi n) + \frac{1}{6n} = \frac{1}{6n}$

On note $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite extraite de v_n tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_{(6n+1)}$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad w_n &= \sin\left(\frac{(6n+1)\pi}{3}\right) + \frac{1}{6n+1} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{6n+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6n+1} \end{aligned}$$

Les suites v' et w convergent vers des limites différentes or elles sont toutes deux extraites de v donc cette dernière diverge.