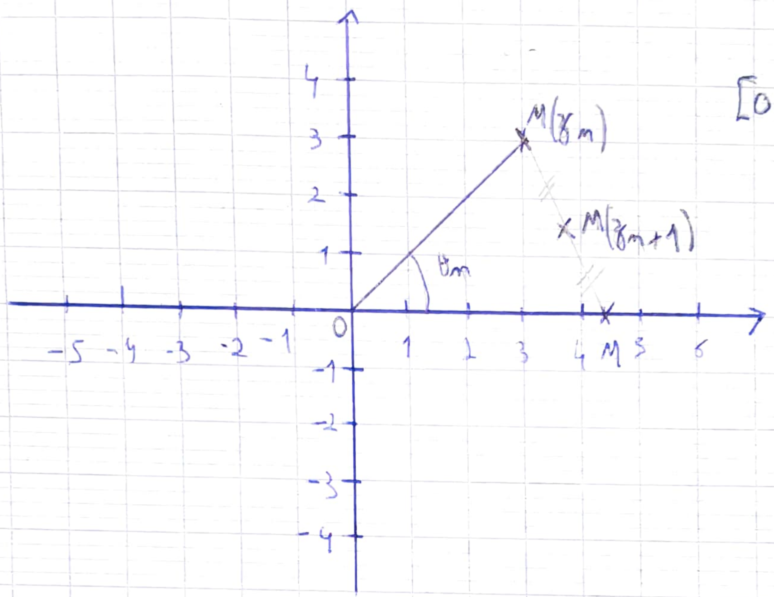
EXERCICE 17

1)



$[OM(z_n)] = r_n$

2) D'après l'énoncé : Soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$ donc $r_{n+1} e^{i\theta_{n+1}} = \dfrac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2}$

factorisation $\rightarrow = \dfrac{r_n (e^{i\theta_n} + 1)}{2}$

angle moitié $\rightarrow = r_n e^{i\frac{\theta_n}{2}} \dfrac{(e^{i\frac{\theta_n}{2}} + e^{-i\frac{\theta_n}{2}})}{2}$

formule d'Euler $\rightarrow = r_n e^{i\frac{\theta_n}{2}} \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$

or $-\pi \leq \theta_n \leq \pi$ donc $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta_n}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ ainsi $\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \geq 0$

comme $r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ est positif, alors l'expression trouvée est la forme exp de z_{n+1}

donc $\boxed{r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)}$

et $\boxed{\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n}$.

$\theta_n = \dfrac{\theta}{2^n}$

$(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et comme $-1 < q < 1$, la suite converge vers 0.

3) On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

$$= r_n \sin(\theta_n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

donc $U_{n+1} = r_{n+1} \sin(\theta_{n+1})$

$= r_{n+1} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ question 2

$= r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ question 2

$= \frac{1}{2} r_n \sin(\theta_n)$ formule de trigo ($\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$)

$= \frac{1}{2} U_n$

Ainsi $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$U_n = \frac{U_0}{2^n}$ avec $U_0 = r \sin(\theta)$.

En égalisant les 2 expressions de U_n :

$$\frac{U_0}{2^n} = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \iff \frac{r \sin(\theta)}{2^n} = r_n \sin(\theta_n)$$

- Notons que si $\theta \equiv 0[\pi]$ alors $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à 0. De plus si $\theta = 0$, alors $z_0 = r$ et $z_{n+1} = r_n$. Ainsi la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera constante égale à z_0

- si $\theta \not\equiv 0[\pi]$ on a :

$$\boxed{r_n = \frac{r \sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}}$$ car θ n'est pas nul ...

4) $r_n = \dfrac{r \sin\theta}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$

Notons que $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \sim \frac{\theta}{2^n}$

car $\frac{\theta}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi $r_n \sim \dfrac{r \sin(\theta)}{\theta}$

on a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \dfrac{r \sin(\theta)}{\theta}}$

$z_n = r_n e^{i\frac{\theta_n}{2}} \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0$

donc par operations sur les limites, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \dfrac{r \sin\theta}{\theta}}$