Éléonore PERBEN

Exercice 1.

d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^2}{4} \end{cases}$$

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + \dfrac{x^2}{4}$ est sa fonction sous jacente telle que ~~[illegible]~~

Avant de dérier une fonction vérifie qu'elle est dérivable. Une simple phrase suffit : " f est dérivable car polynomiale"

Le "telle que" est ici mal employé ! Plutôt utiliser "définie par"

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

La dérivée de f est $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}x$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{2}x \geq 0 \iff x \geq 0$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Position par rapport au graphe de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$: soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$$

Ce polynôme a pour racine double $x = 2$

Tableau de signes de $f(x) - g(x)$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$+$	

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le graphe de f est au-dessus du graphe de g.

La fonction f admet un unique point fixe en 2.

Notons que $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$ donc $\mathbb{R}$ est stable par f.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$

Supposons d'abord que $u_0 \in [0, +\infty[$
L'intervalle $[0, +\infty[$ est stable par f
Sur cet intervalle, f est croissante et
$\forall x \in [0, +\infty[, \ f(x) - x \geqslant 0$
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $u_0 \in [0, +\infty[$

- Supposons que $u_0 \in [0; 2]$ et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.

Ici pas besoin de u_0 dans l'hypothèse de récurrence. Tu l'as déjà fixer quelconque !

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$:
"$\forall u_0 \in [0, 2]$, $u_n \leqslant 2$"
est vraie.

On a bien $u_0 \in [0, 2]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et déduisons en $\mathcal{P}(n+1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. on a alors

$0 \leqslant u_n \leqslant 2$ (hypothèse de récurrence)

$\Rightarrow 0 \leqslant u_n^2 \leqslant 4$

$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{u_n^2}{4} \leqslant 1$

$\Rightarrow 1 \leqslant 1 + \frac{u_n^2}{4} \leqslant 2$

Ainsi on a
$u_{n+1} \in [0; 2]$
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie donc d'après le principe de récurrence, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien majorée par 2.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, d'après le théorème de la limite monotone elle converge, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f.

On a alors forcément

$$\boxed{\forall u_0 \in [0; 2], \ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2}$$

L'argument est plutôt u0>2

· Supposons maintenant que $u_0 \in]2 ; +\infty[$ et montrons qu'alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Montrons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée, c'est à dire :

$\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant A$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, comme elle est croissante, alors elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ses termes tendent vers un point fixe de f. Le seul point fixe de f est 2.

On aurait donc

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

Mais $u_0 \neq 2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Il est donc impossible que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

D'après le théorème de la limite monotone, une suite croissante et non majorée voit ses termes tendre vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi

$$\boxed{\forall u_0 \in]2 ; +\infty[, \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

· Supposons que $u_0 \in [-2 ; 0[$ et montrons qu'alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

$$-2 \leqslant u_0 < 0 \Rightarrow 0 < u_0^2 \leqslant 4$$
$$\Rightarrow 1 \leqslant 1 + \frac{u_0^2}{4} \leqslant 2$$

Ainsi, si $u_0 \in [-2 ; 0[$, alors $u_1 \in [0 ; 2]$

Il a été démontré que dans ce cas,

$$\boxed{\forall u_0 \in [-2 ; 0[\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2}$$

· Supposons que $u_0 \in]-\infty ; -2[$ et montrons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ dans ce cas

$$u_0 < -2 \Rightarrow u_0^2 > 4$$
$$\Rightarrow u_1 > 2$$

Ainsi : $u_0 \in]-\infty ; -2[\Rightarrow u_1 \in]2 ; +\infty[$

Il a été démontré que dans ce cas :

$$\boxed{\forall u_0 \in]-\infty ; -2[\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$