Ex 2.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $P(n)$: " u_n existe et $u_n > 0$ " est vraie.

$\boxed{I}$ pour $n = 0$:

u_0 existe et $u_0 > 0$ donc $P(0)$ vraie

$\boxed{H}$ Soit $n \in \mathbb{N}$

Sq. $P(n)$ est vraie et mq. $P(n+1)$ vraie i.e. u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$

D'après $P(n)$ u_n existe et $u_n > 0$ donc $2u_n^2$ et $1+5u_n$ existent et sont strict. positifs.

Ainsi $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n} > 0$ et u_{n+1} existe.

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$\boxed{cl}$ Nous avons montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2}{1+5u_n} - u_n$$

$$= \frac{2u_n^2 - u_n - 5u_n^2}{1+5u_n}$$

$$= \frac{-3u_n^2 - u_n}{1+5u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(-3u_n - 1)}{1+5u_n}$$

Or nous avons mq $u_n > 0$ donc $u_n(-3u_n - 1) < 0$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$

u est ainsi décroissante

2. u est décroissante et minorée par 0 d'après 1.

D'après le théorème de la limite monotone u converge vers une limite réelle ℓ.

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x^2}{1+5x}$ est continue.

Donc on a :

$$f(\ell) = \ell$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\ell^2}{1+5\ell} = \ell$$

$$\Leftrightarrow 2\ell^2 = \ell + 5\ell^2$$

$$\Leftrightarrow \ell(3\ell + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = -\frac{1}{3}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $\ell = 0$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$

$5u_{n+1} \geq 5u_n$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5u_{n+1}} \leq \dfrac{1}{5u_n}$ car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \dfrac{u_n^2}{5u_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{5}$ car $u_n^2 > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{2u_n^2}{5u_{n+1}} \leq \dfrac{2u_n}{5}}$

On reconnaît une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ avec $u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{5}$

D'où $\boxed{u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0}$