Lycée Condorcet Janvier 2024
PCSI

Limites et continuité

Table des matières

1 Définitions et premières propriétés **1**
1.1 Limites . . . 1
1.2 Limites à gauche et à droite . . . 3
1.3 Propriétés . . . 3
1.4 Opérations sur les limites . . . 4
1.5 Théorèmes d'existence de limite. . . . 5

2 Continuité en un point. **8**
2.1 Définitions. . . . 8
2.2 Proplongement par continuité . . . 8
2.3 Suites et fonctions continues . . . 9
2.4 Opérations sur les fonctions continues en un point. . . . 10

3 Continuité sur un intervalle et propriétés globales. **10**
3.1 Continuité sur un intervalle, opérations. . . . 10
3.2 Image d'un intervalle par une fonction continue . . . 11
3.2.1 Théorème des valeurs intermédaires . . . 11
3.2.2 Théorème des bornes atteintes. . . . 13

4 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ **13**

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Dans tout le cours, les lettres I et J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point. On note $\overline{I}$ la réunion de I et de ses extrémités. Par exemple, $I =]3, 5[$, alors $\overline{I} = [3, 5]$. Si $I = [3, +\infty[$, $\overline{I} = I \cup \{+\infty\}$ (ainsi $\overline{I} \subset \overline{\mathbb{R}}$).

On note $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeur dans $\mathbb{R}$.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Limites

Définition 1.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit $a \in \overline{I}$. On dit qu'un propriété portant sur f est vraie **au voisinage de** a si

- dans le cas $a \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que la propriété soit vraie sur $[a - \eta, a + \eta] \cap I$,
- dans le cas $a = +\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété soit vraie sur $[A, +\infty[$,
- dans le cas $a = +\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété soit vraie sur $] - \infty, A]$,

Cette notion de voisinage joue, pour les fonctions, le rôle du “à partir d'un certain rang” des suites.

Définition 2 (Limites en un point fini).

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que :

- f admet une limite (finie) $\ell \in \mathbb{R}$ en a, on le note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- f tend vers $+\infty$ en x_0, on le note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

- f tend vers $-\infty$ en x_0, on le note $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$:

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \leq B.$$

Remarque. Si $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$, alors si f admet une limite en a c'est nécessairement $f(a)$!

Définition 3 (Limites en $+\infty$).

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On dit que :

- f admet une limite (finie) $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, on le note $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq M \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on le note $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, x \geq M \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

- f tend vers $-\infty$ en $+\infty$, on le note $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$:

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq M \Longrightarrow f(x) \leq B.$$

Définition 4 (Limites en $-\infty$).

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On dit que :

- f admet une limite (finie) $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$, on le note $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leq N \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- f tend vers $+\infty$ en $-\infty$, on le note $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, x \leq N \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

- f tend vers $-\infty$ en $-\infty$, on le note $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$:

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leq N \Longrightarrow f(x) \leq B.$$

Proposition 5 (Unicité de la limite)**.**

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique. Plus précisément, pour L et L' $\in \overline{\mathbb{R}}$, si f admet L et L' pour limite en a alors $L = L'$.
On pourra donc parler, lorqu'elle existe, de **la** limite de la fonction en a, que l'on notera $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

On souligne la nuance suivante. Écrire $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L$ signifie :"f admet une limite en a **et** celle-ci vaut L." Alors qu'écrire $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ signifie : "la limite de f vaut L". Écrire cette dernière phrase réclame d'avoir d'abord démontré que la limite de f en a existe.

1.2 Limites à gauche et à droite

Définition 6 (Limites à gauche et à droite)**.**

Soient $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

- On dit que f admet une limite à gauche en a si $f\ |_{I \cap]-\infty, a[}$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.
- On dit que f admet une limite à droite en a si $f\ |_{I \cap]a, +\infty[}$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$
- Supposons que f n'est pas définie en a. Si f admet une limite à gauche et à droite en a **et que ces limites sont égales** (disons à ℓ), on applelle ce nombre limite en a et on écrit :

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$$

Proposition 7.

Soit I un intervalle ouvert, $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ (on insiste sur l'hypothèse que **f est définie en** a). On a l'équivalence :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \begin{cases} f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell \\ f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}$$

1.3 Propriétés

Proposition 8.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voinage de a.

Proposition 9.

Soient $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite $\ell > 0$ en a, alors f est minorée au voisinge de a par un nombre strictement positif.

Théorème 10 (Caractérisation séquentielle de la limite).

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \overline{I}$. On a l'équivalence :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}},\ \ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \implies f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell\right)$$

Méthode.

Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a, on peut chercher deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent toutes les deux vers a mais telles que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ont deux limites différentes.

Exemple 1

1. Montrer que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ n'a pas de limites en 0^+.
3. Montrer que la fonction définie sur $[1, +\infty[$ $f : x \mapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

1.4 Opérations sur les limites

Proposition 11.

Soit $a \in \overline{I}$. Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ admettant des limites finies et ℓ et ℓ' quand x tend vers a. Alors :

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\ell + \mu\ell'$.
2. $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell\ell'$.
3. Si $\ell' \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est définie au voisinage de a et $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Remarques : Ces formules se généralisent aux cas des limites infinies en a, sauf en cas de **formes indéterminées** du type :

$$+\infty - \infty, \qquad 0 \times (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

Proposition 12.

Soient $a \in \overline{I}$ et f, g deux fonctions telles que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et g bornée au voisinage de a. Alors $f(x) \times g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Exemple 2

Déterminer si elle existe la limite en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$.

Proposition 13 (Composition des limites).

Soient $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{A}(J, \mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$ et $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $c \in \overline{R}$.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \\ g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} c \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} c.$$

Démonstration : Soient $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{A}(J, \mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$ et $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $c \in \overline{R}$.
Supposons de plus que

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \\ g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} c \end{cases}.$$

Nous allons démontrer cette proposition à l'aide de la caractérisation séquentielle de la limite.
Soit donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de I. Supposons qu'elle converge vers a, nous devons démontrer que la suite $(g \circ f(un))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

D'après la caractérisation séquentielle de la limite et comme par hypothèse $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ alors $f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} b$.
Mais par hypothèse $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} c$ ainsi, toujours par caractérisation de la limite :

$$g(f(u_n)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} c$$

Nous avons ainsi montrer que, toute suite d'éléments de I qui converge vers a

$$g \circ f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} c$$

La caractérisation séquentielle de la limite permet ainsi de conclure que

$$\boxed{g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} c}$$

■

Proposition 14.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ admettant une limite en $a \in \overline{I}$.
Si f est majorée par M sur I, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq M$.
Plus généralement, si $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ sont deux fonctions admettant une limite en $a \in \overline{I}$.

$$\text{Si} \quad \forall x \in I \;\; f(x) \leq g(x) \quad \text{alors} \;\; \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

1.5 Théorèmes d'existence de limite.

On adapte pour les fonctions le théorème d'encadrement connu pour les suites.

Théorème 15 (d'encadrement pour les fonctions.)**.**

Soient f, g, et h définies sur I, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si} \quad f : \begin{cases} \forall x \in I \;\; f(x) \leq g(x) \leq h(x), \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \\ h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{cases} \qquad \text{alors} \quad g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Démonstration : Soient f, g, et h définies sur I, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que

$$f : \begin{cases} \forall x \in I \;\; f(x) \leq g(x) \leq h(x), \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \\ h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{cases}$$

Encore une fois nous allons démontrer ce résultat en utilisant les deux implications de la caractérisation de la limite.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I. Supposons qu'elle converge vers a. D'après la caractérisation de la limite et comme $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ et $h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ alors

$$f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell, \quad h(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell$$

par ailleurs, comme $\forall x \in I \;\; f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(u_n) \leq g(u_n) \leq h(u_n)$$

Ainsi d'après le théorème d'encadrement pour les suites, on a :

$$g(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Ainsi, toute suite d'éléments de I qui converge vers a vérifie :

$$\boxed{g(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

La caractérisation séquentielle de la limite permet ainsi de conclure que

$$\boxed{g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell}$$

■

Exemple 3

Calculer la limite suivante (on montrera en même temps qu'elle existe) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\lfloor x\rfloor .$$

Théorème 16 (Majoration, minoration)**.**

Soient $f, g \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. On suppose que : $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$.

1. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.

Théorème 17 (de la limite monotone.)**.**

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$.

- Supposons f croissante.
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.

    Sinon on a $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.

    Sinon on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Supposons f décroissante.
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$. Sinon on a $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$.
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$. Sinon on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Démonstration : Soient $a < b \leq +\infty$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$. On a supposé ici que $a \in R$.
Supposons f croissante on s'intéresse à la limite en a de la fonction f.

- Supposons que f est minorée.
  Notons $E = f(]a,b[) = \{f(x), x \in]a,b[\}$. Comme $a < b$ alors $]a,b[$ est non vide et donc E non plus, de plus, comme on a supposé f minorée alors E est minoré. L'ensemble E admet donc une borne inférieure, notons la ℓ. Montrons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ (nous devons montrer que : $\forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha > 0\ \forall x \in]a,b[,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.)
  Soit $\varepsilon > 0$.
  D'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe un réel $y_0 \in E$ tel que

$$y_0 < \ell + \varepsilon$$

Par définition de E, et comme $y_0 \in E$, il existe il réel $x_0 \in]a,b[$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et donc tel que

$$f(x_0) < \ell + \varepsilon$$

De plus, comme f est croissante, pour tout $x \in]a, x_0]$, on a

$$f(x) \leq f(x_0) < \ell + \varepsilon$$

Enfin par définition de la borne inférieure, ℓ est un minorant de E et donc pour tout $x \in]a, x_0]$

$$\ell - \varepsilon \leq \ell \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \iff |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On pose alors $\alpha = x_0 - a$ c'est bien un réel positif. Et, pour tout $x \in]a,b[$;

$$x \in]a, x_0] \iff |a - x| \leq \alpha$$

Ainsi on a bien

$$\forall x \in]a,b[\ \ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On a montré que

$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell}$$

- Supposons maintenant que f n'est pas minorée et montrons que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.
  C'est à dire montrer que

  $$\forall B \in \mathbb{R} \ \ \exists \alpha > 0 \ \ \forall x \in]a,b[\quad |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq B$$

  Soit $B \in \mathbb{R}$.
  Comme f n'est pas minorée, il existe un réel $x_0 \in]a,b[$ tel que

  $$f(x_0) \leq B.$$

  De plus, comme f est décroissante, pour tout $x \in]a, x_0[$,

  $$f(x) \leq f(x) \leq B.$$

  On pose alors $\alpha = x_0 - a$. Avec ce qui précède, on a donc :

  $$\forall x \in]a,b[\ \ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq B$$

  La fonction f vérifie bien

  $$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty}$$

■

En conséquence on a le résultat suivant :

Proposition 18.

Soient $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ une fonction monotone et $a \in I$ tel que a ne soit pas une borne de I. Alors f admet des limites finies à gauche et à droite en a et on a :

$$\begin{array}{ll} \text{si } f \text{ est croissante :} & \displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x); \\ \text{si } f \text{ est décroissante :} & \displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^-} f(x); \end{array}$$

Remarque. Ces deux inégalités peuvent être strictes et la fonction n'est pas forécment conitnue en a. On pourra cependant établie la continuité en a en montrant que $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$. L'existence des limites étant assurées par la monotonie de f.

Exemple 4

On considère la fonction F définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{dt}.$$

Montrer qu'elle a une limite en $+\infty$.

2 Continuité en un point.

2.1 Définitions.

Définition 19.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On dit que f est continue en a si

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a).$$

Autrement dit f est continue en a si f admet une limite en a. C'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I \quad | x - a | \leq \eta \implies | f(x) - f(a) | \leq \varepsilon$$

Remarque : Cette définition est redondante. En effet, si f admet une limite en a et est définie en a, alors nécessairement,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Définition 20.

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On dit que

- f est **continue à gauche** en a si f admet $f(a)$ pour limite à gauche en a.
- f est **continue à droite** en a si f admet $f(a)$ pour limite à droite en a.

Exemple 5

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue à gauche à droite en 2 ?

Proposition 21.

Soient $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple 6

1. Soient a et b deux réels et soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ la fonction définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{1+x} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$

   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 0.

2. La fonction définie par : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$. Est-elle continue à droite ? à gauche ?

2.2 Proplongement par continuité

Définition 22.

Soient $a \in I$ et $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
La fonction f est prolongeable par continuité en a s'il existe une fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ continue en a et telle que $\tilde{f} |_{I \backslash \{a\}} = f$.

Proposition 23.

Soient $a \in I$ et $f : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
La fonction f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie ℓ en a.
Dans ce cas, un tel prolongement $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ est unique, donné par :

$$\tilde{f} : x \longmapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases}$$

On appelle le prolongement par continuité de f en a (qu'on notera souvent f sans distinction par abus de notation).

Exemple 7

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$.
   Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. L'application f se prolonge par continuité en 0, par l'application $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(0) = 1$, et : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \tilde{f}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On rappelle que la fonction puissance d'exposant α, notée p_α, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
   $$p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$
   On a $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha < 0 \\ 0 \text{ si } \alpha > 0 \end{cases}$. Ainsi si $\alpha > 0$, la fonction p_α peut être prolongée par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$.

2.3 Suites et fonctions continues

Proposition 24 (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.)**.**

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Exemple 8

Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Corollaire 25.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$. On dit que ℓ est un point fixe de f.

2.4 Opérations sur les fonctions continues en un point.

Proposition 26.

Soient $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Supposons que f et g sont continues en a. Alors,

- pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en a,
- la fonction fg est continue en a,
- si $f(a) \neq 0$, alors la fonction $(1/f)$ est bien définie au voisinage de a et y est continue.

Proposition 27.

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

3 Continuité sur un intervalle et propriétés globales.

3.1 Continuité sur un intervalle, opérations.

Définition 28.

Une fonction $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ est dite **continue sur** I si elle est continue en tout point de I.
L'ensemble des fonctions continues sur I pourra être noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Exemple 9

Nos fonctions usuelles sont la plupart du temps continues sur leur intervalle de définition. La fonction partie entière est un exemple de fonction discontinue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 29 (Opérations algébriques sur les fonctions continues.)**.**

L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est une partie de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
Il est stable par combinaison linéaire et produit.
De plus, si une fonction f de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ne s'annule pas sur I, alors $1/f$ appartient à $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Proposition 30 (Composition de fonctions continues)**.**

Soit $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{A}(J, \mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$.

Si f est continue sur I et g continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple 10

Soient f et g sont deux fonctions continues sur I, montrer que $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues sur I.

Méthode (Continuité : le point de vue global et le point de vue local se complètent.).

Soit $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{R})$. Pour démontrer la continuité de f sur I,

- On utilise des théorèmes globaux sur tous les sous-intervalles de I où on peut le faire : continuité de f comme somme, produit, composée...
- En tous les points a de I qui *posent problème* (pour lesquels on ne peut pas utiliser les théorèmes globaux...), on revient au point de vue local, c'est à dire la définition de la continuité en a.

Exemple 11

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \exp(1/x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3.2 Image d'un intervalle par une fonction continue

3.2.1 Théorème des valeurs intermédaires

Théorème 31 (des valeurs intermédiaires TVI.).

1. Lorsqu'une fonction **continue** et **change de signe** sur un **intervalle**, alors elle s'y annule.

   On peut détailler comme suit. Si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$, telle que $f(a)f(b) \leq 0$ (changement de signe entre a et b), alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

2. Plus généralement, si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ alors toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ possèdent un antécédent par f.
   Plus précisément, pour tout $a,b \in I$ et pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration : Soit f une fonction continue sur un segment non réduit à un point $[a,b]$. On suppose que $f(a)f(b) \leq 0$.
Pour démontrer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$, nous allons construire deux suites adjacentes qui convergent vers c. On construit ces suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.
Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$ alors les suites sont les suites constantes égales à a ou b.
On peut supposer maintenant que $f(a)f(b) < 0$. On pose alors :

$$a_0 = a, \quad \text{et} \quad b_0 = b$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Si $f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$ alors
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$
- Si $f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$ alors
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$
- Si $f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$ alors
$$a_{n+1} = b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Notons que, comme $[a,b]$ est un intervalle, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, les a_n et b_n sont dans $[a,b]$. La définition précédente a donc bien un sens.
On peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Cela montre, par encadrement, que $a_n - b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Étudions maintenant la monotonie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a les trois cas suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \geq 0 \\ b_{n+1} - b_n = 0 \leq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} - a_n = 0 \geq 0 \\ b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \leq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} - a_n = 0 \geq 0 \\ b_{n+1} - b_n = 0 \leq 0 \end{array}\right.$$

Ainsi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, elles convergent vers la même limite. Notons la c. Comme $[a, b]$ est un intervalle $c \in [a, b]$. Il reste à voir que $f(c) = 0$.Notons tout d'abord que f étant continue, on a

$$f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(c) \text{ et } f(b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(c)$$

Supposons maintenant que $f(a) \leq 0$ et donc $f(b) \geq 0$ (le cas inverse se traite de manière similaire). Par construction pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(a_n) \leq 0 \text{ et } f(b_n) \geq 0$$

Les limites respectent les inégalités larges ainsi on a

$$f(c) \leq 0 \text{ et } f(c) \geq 0$$

D'où

$$f(c) = 0$$

■

Remarque : Si on enlève une seule hypothèse la conclusion ne tient plus !

Exemple 12

1. Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 3 s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue sur $[a, b]$.
   Montrer l'existence d'un point fixe pour f. (i.e. $\exists x_0 \in [a, b], f(x_0) = x_0$).

Corollaire 32.

Si I est un **intervalle** et si f est **continue** sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque : L'intervalle d'arrivée n'est pas toujours de même nature que l'intervalle de départ de la fonction ! Par exemple :

$$\begin{array}{rcl} f(x) = \sin(x) & \text{et} & f(]-\pi, \pi[) = [-1, 1] \\ g(x) = x^2 & \text{et} & g(]-1, 1[) = [0, 1[\end{array}$$

Méthode.

Ce théorème est en général utlisé pour montrer la surjectivité d'une fonction.
En effet si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ le TVI indique que son ensemble image est un intervalle. Il suffit donc de calculer les bornes de cet intervalle. Si la fonction est de plus monotone, les borne de l'intervalle image sont les limites de f en les bornes de l'intervalle de départ.

Théorème 33 (de la bijection ou TVI strictement monotone.)**.**

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ une fonction strictement monotone sur I.

- Elle réalise une bijection de I dans l'intervalle $J = f(I)$.
- De plus, sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f, et elle est continue sur I.

3.2.2 Théorème des bornes atteintes.

Théorème 34.

Une fonction continue sur un segment y est bornée, et y atteint ses bornes.

Plus précisément, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, alors il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.
Les réels $f(c)$ et $f(d)$ sont alors les minimum et maximum globaux de f sur $[a, b]$.

Proposition 35.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

4 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Comme pour les suites, nous généralisons aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ce qui est possible de généraliser des focntions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ainsi toutes les définitions qui utilisent la valeur absolue sont généralisables mais toutes celles basée sur l'ordre dans $\mathbb{R}$ ne peuvent pas se généraliser (majorant, minorant, maximum, minimum limites infinies, théorème d'encadrement, théorème des valeurs intermédiaires, ...).

Définition 36.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{I}$

- On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ quand x tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \mid x - a \mid \leq \eta \Longrightarrow \mid f(x) - \ell \mid \leq \varepsilon.$$

- On dit que f est conitnue en a si elle admet une limite finie en a. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
- On dit que f est bornée au voisinage de a s'il existe $M \in \mathbb{R}$ et $\eta > 0$ tels que :

$$\forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \eta \Longrightarrow M.$$

Proposition 37.

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{I}$. Alors f admet une limite finie en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent des limites finies quans x tend vers a et dans ce cas on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \mathrm{Re}(f)(x) + i \lim_{x \to a} \mathrm{Im}(f)(x)$$

Proposition 38.

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{I}$.
Si f admet une limite finie en a alors $\overline{f}$ admet aussi une limite finie en a et

$$\lim_{x \to a} \overline{f}(x) = \overline{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Proposition 39.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On a l'équivalence :

$$f \text{ est continue sur } I \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f) \text{ est continue sur } I \\ \mathrm{Im}(f) \text{ est continue sur } I \end{cases}$$