Lycée Condorcet
PCSI

Comparaison de suites

Exercice 1.
Déterminer le comportement asymptotique des suites de terme général :

a. $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ où $a \in \mathbb{R}$ *b.* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ *c.* $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ *d.* $\frac{\ln(1+n^2)}{n}$

e. $n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ *f.* $\frac{n-\sqrt{n^2+1)}}{n-\sqrt{n^2-1}}$ *g.* $\left(\frac{n+6}{n-2}\right)^n$ *h.* $e^{-n}\mathrm{ch}\big((n^4+1)^{1/4}\big)$

Exercice 2.
Trouver un équivalent simple des suites de terme général suivant :

a. $\sqrt{n^2+n+1}-n$ *b.* $\ln\left(\frac{2n^2+4n+3}{7n^2+5n+1}\right)$ *c.* $\sqrt{n^3+n^2+1}-n$

d. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k^2$ *e.* $\frac{\sin(\frac{1}{n})}{e^{2/n}-1}$ *f.* $\ln\left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$

g. $\ln(n^2+3n+7)$ *h.* $\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{e^{1/n}-1}$ *i.*$\lfloor\sqrt{n}\rfloor\sin\frac{\pi}{n}$

Exercice 3.
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n) : x = -n\ln x$.

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On la note x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis donner un équivalent simple de $x_n - \ell$ où ℓ est sa limite.

Exercice 4.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$1-u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x$$
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$.
5. En déduire que
$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 5. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des points fixes de la fonction tangente. Autrement dit, pour tout entier positif n, u_n est l'unique solution de l'équation $\tan(x) = x$ dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

1. Montrer que $u_n \sim n\pi$.
2. Justifier que $u_n - n\pi = \arctan(u_n)$. En déduire la limite de la suite $(u_n - n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Donner un équivalent simple de $u_n - n\pi - \ell$.