Lycée Condorcet
PCSI

16 janvier 2024

Devoir surveillé 4
Mathématiques

4 heures

Calcul divers

1. Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers + l'infini de :

   1. $e^{2n}+2n^4$ 2. $\ln(n+1)-\ln(n)$ 3. $\sqrt{\frac{2}{n^4}+\frac{2}{n^2}}$ 4. $\frac{n\ln(n^2+1)+2n}{(n+1)^2\ln(n^5+1)}$ 5. $\ln\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

2. On étudie dans cet exercice la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

   (a) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

   (b) En déduire un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{k}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

   (c) En déduire un encadrement de u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (d) Montrer : $\frac{u_n}{\sqrt{n}} \to 2$.

3. Soit une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \geq -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}.$$

   (a) Justifier brièvement que (u_n) est bien définie.

   (b) Supposons $u_0 = 1$. Étudier la monotonie de (u_n). Démontrer que cette suite est majorée. Et montrer qu'elle converge vers une limite que vous déterminerez.

   (c) Supposons $u_0 = 2$. Mêmes questions que ci-dessus.

Une suite récurrente

Soit $u = (u_n)$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}.$$

1. **Justifier que la suite u est bien définie.**
2. **Étudier la monotonie de la suite u. Démontrer que**

   $$u_n \longrightarrow +\infty.$$

   On pourra raisonner par l'absurde.
3. **Pour tout entier naturel k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k. En déduire la limite de $u_{k+1}^2 - u_k^2$ lorsque k tend vers $+\infty$.**
4. **Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n^2}{4}$.**
   (a) **Montrer que pour tout entier naturel k, $v_{k+1} - v_k \geq 1$.**
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \geq n$.
   (b) **Montrer que pour tout entier naturel k, $v_{k+1} - v_k \leq 1 + \frac{1}{k}$.**
   (c) **Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x) \leq x$.**
   En déduire que pour tout entier naturel $k \geq 2$: $\dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$
   (d) **Déduire des questions b) et c) que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a**

   $$v_n - v_0 \leq n + \frac{1}{v_0} + 1 + \ln(n).$$

5. **Montrer que $v_n \sim n$ et $u_n \sim 2\sqrt{n}$.**

Corrigé

1. Il est facile de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{u_n} > 0$. Ceci démontre que la suite (u_n) est (strictement) croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle diverge vers $+\infty$ ou converge vers une limite finie. Supposons qu'on est dans ce second cas. Notons alors ℓ sa limite. C'est un nombre supérieur à 1 par stabilité des inégalités larges. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient $\ell = \ell + \frac{2}{\ell}$, d'où $\frac{2}{\ell} = 0$. Ceci étant absurde, on a bien que u diverge vers $+\infty$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$.

   $$\begin{aligned} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= (u_{k+1} - u_k)(u_{k+1} + u_k) \\ &= \frac{2}{u_k}\left(u_k + u_k + \frac{2}{u_k}\right) \\ &= 4 + \frac{4}{u_k^2} \end{aligned}$$

   Puisque $u_k \to +\infty$, on a $u_{k+1}^2 - u_k^2 \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 4$.
4. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n^2}{4}$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a
$$v_{k+1} - v_k = \frac{u_{k+1}^2 - u_k^2}{4} = \frac{1}{4}\left(4 + \frac{4}{u_k^2}\right) = 1 + \frac{1}{u_k^2}.$$
Ce calcul amène bien que $v_{k+1} - v_k \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sommons l'inégalité précédente de 0 à $n-1$:
$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 \qquad \text{donc par télécopage } v_n - v_0 \geq n.$$
On obtient donc $v_n \geq n + \frac{1^2}{4} \geq n$.

(b) Pour k entier naturel, on a calculé $v_{k+1} - v_k = 1 + \frac{1}{u_k}$. Or, si $k \geq 1$, on a $u_k \geq k$ donc $u_k^2 \geq k^2$ puis $\frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k}$. On obtient bien que
$$\forall k \geq 1 \quad v_{k+1} - v_k \leq 1 + \frac{1}{k}.$$

(c) Soit $k \geq 2$. La fonction ln est continue sur $[k-1, k]$, et dérivable sur $]k-1, k[$. D'après le théorème des accroissements finis,
$$\exists c \in]k, k+1[\quad \frac{\ln(k) - \ln(k-1)}{k - (k-1)} = f'(c).$$
Puisque $c > k$, on a $\frac{1}{c} < \frac{1}{k}$, d'où
$$\ln(k) - \ln(k-1) = \frac{1}{c} \leq \frac{1}{k}.$$

(d) Sommons l'inégalité de la question b) pour k entre 1 et n :
$$\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1}(1 + \frac{1}{k}).$$
On obtient
$$v_n - v_1 = (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$
En écartant le premier terme dans la somme des $1/k$, on peut utiliser l'inégalité de la question c) et écrire
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n-1}(\ln(k) - \ln(k-1)) = 1 + \ln(n) - \ln(1).$$
On a donc
$$v_n - v_1 = (n-1) + 1 + \ln(n-1) - \ln(1),$$
Ceci amène bien que $v_n - v_1 \leq n + \ln(n)$.

5. Tout nous pousse à encadrer v_n. Pour $n \geq 3$,
$$n \leq v_n \leq n + \ln(n) + v_1 \qquad \text{d'où} \quad 1 \leq \frac{v_n}{n} \leq 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{v_1}{n}.$$
On a $\frac{v_1}{n} \to 0$ et par croissances comparées, $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$. Cet encadrement et le théorème des gendarmes conduit à $\frac{v_n}{n} \to 1$.

Pour tout $n \geq 1$, $u_n^2 = 4v_n$, d'où (tout est positif) $\frac{u_n^2}{n} = 4\frac{v_n}{n}$. Passons à la racine, en rappellant que u_n et v_n sont des nombres positifs. On obtient $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{v_n}{n}}$. Puisque $v_n/n \to 1$ et que la fonction racine carrée est continue en 1, on a

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} \to 2\sqrt{1} = 2.$$

Un développement asymptotique (Agro 2016)

Dans cet exercice, on considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}.$$

1. **Étude de la nature de (S_n).**
   (a) **Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.**
   (b) **Soit $k \geq 4$. Montrer que**
   $$\forall x \in [k-1, k] \quad \frac{\ln(x)}{x} \geq \frac{\ln(k)}{k} \qquad \textbf{et} \qquad \forall x \in [k, k+1] \quad \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\ln(k)}{k}.$$
   (c) **Montrer que, pour tout entier $k \geq 4$, on a**
   $$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$
   (d) **En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A, B et C telles que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on ait :**
   $$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$
   (e) **En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
2. **Recherche d'un équivalent de S_n.**
   (a) **Montrer que $\ln^2(n+1) \sim \ln^2(n)$.**
   (b) **En déduire que $S_n \sim \dfrac{\ln^2(n)}{2}$.**
3. **Étude asymptotique de la suite u définie par :**
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$
   (a) **Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.**
   (b) **En déduire que la suite u converge.**
   Dans la suite de l'exercice, la limite de u sera notée ℓ.
4. **Une application. On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par**
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}.$$

(a) Prouver que pour tout entier naturel n non nul, on a

$$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

(b) On admet qu'il existe un réel γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
En déduire que la suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

(c) En déduire que $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

(d) Que peut-on dire au sujet de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Corrigé

1. Étude de la nature de (S_n).

(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. On a :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

(la limite en $+\infty$ ayant été obtenue par croissances comparées).

(b) Soit $k \geq 4$. Alors, $k-1 \geq 3 \geq e$. Sur $[e,+\infty[$, on vient de montrer que f est décroissante. En utilisant la décroissance de f sur les deux intervalles $[k-1,k]$ et $[k,k+1]$, on obtient bien

$$\forall k \in [k-1,k] \quad \frac{\ln(x)}{x} \geq \frac{\ln(k)}{k} \quad \text{et} \quad \forall k \in [k,k+1] \quad \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\ln(k)}{k}.$$

(c) Comme $k \leq k+1$, par croissance de l'intégrale on obtient :

$$\forall k \geq 4 \quad \int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (*).$$

(d) Sommons les inégalités ci-dessus pour k entre 1 et n : la relation de Chasles s'applique :

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=4}^{n}\frac{\ln(k)}{k} \leq \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_1^{n+1}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq S_n - \sum_{k=1}^{3}\frac{\ln(k)}{k} \leq \int_3^{n}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

On sait calculer les intégrales ci-dessus : en effet,

$$\int\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln'(x)\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x)^2.$$

On obtient donc

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} \leq S_n - \sum_{k=1}^{3} \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}.$$

C'est bien une inégalité de la forme demandée, en posant $A = \frac{\ln^2(4)}{2}$, $B = \sum_{k=1}^{3} \frac{\ln(k)}{k}$, et $C = \frac{\ln^2(3)}{2}$.

(e) On a $\ln(n+1)^2 \to +\infty$. Ainsi, (S_n) est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$ et donc tend vers $+\infty$.

2. Recherche d'un équivalent de S_n.

(a) Calcul du quotient, pour $n \geq 2$:

$$\frac{\ln(n+1)^2}{\ln(n)^2} = \left(\frac{\ln(n(1++1/n)}{\ln(n)}\right)^2 = \left(\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)^2$$
$$= \left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)^2 \to 1$$

(b) On reprend l'encadrement de la question 1.(c), et on divise par $\ln(n)^2/2$. On obtient que pour $n \geq 4$,

$$\frac{\ln(n+1)^2}{\ln(n)^2} + \frac{2(B-A)}{\ln(n)^2} \leq \frac{2S_n}{\ln(n)^2} \leq 1 + \frac{2(B-C)}{\ln(n)^2}.$$

3. Étude asymptotique de la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

(a) Le rapport de l'épreuve déclare que la question a été « rarement bien traitée » et qu'une indication aurait été la bienvenue. Soit $n \geq 3$. On a

$$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n - \frac{1}{2}\left(\ln(n+1)^2 - \ln(n)^2\right)$$
$$= \frac{\ln(n+1)}{2} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x}\, \mathrm{d}x.$$

Reprenons l'inégalité obtenue à la fin de la question 1.(b). Celle de droite, écrite pour $k = n+1$ (on a bien alors $k \geq 4$) donne exactement

$$\frac{\ln(n+1)}{2} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{t}\, \mathrm{d}x,$$

ce qui montre bien que $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est décroissante à partir du rang 3.
(b) Une fois montré (ou admis !) que la suite (u_n) est décroissante, il reste à observer que d'après l'inégalité montrée en 1.(c), on a, pour tout $n \geq 4$,

$$S_n - \frac{\ln(n)^2}{2} \geq B - A + \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(n)^2}{2} \geq B - A.$$

La suite u, décroissante et minorée, converge d'après le théorème de la limite monotone.

4. Dans son rapport, le jury de l'épreuve dit que la question pouvait se traiter par récurrence. On propose une preuve en écrivant A_{2n} en distinguant les termes d'indice pair et d'indice impair.

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{2j} \frac{\ln(2j+1)}{2j+1} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2j-1} \frac{\ln(2j)}{2j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln(2j+1)}{2j+1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{2j} - 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\overbrace{\ln(2j)}^{\ln(2)+\ln(j)}}{2j} \\
&= S_{2n} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(j)}{j} - \ln(2) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \\
&= S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

(b) La difficulté de cette question est d'arriver à écrire un développement pour S_n, tel que celui qui nous est donné pour la somme des $\frac{1}{k}$. D'après la question 3, $u_n \to \ell$, ce qui se récrit

$$S_n = \frac{\ln(n)^2}{2} + \ell + o(1).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{\ln(2n)^2}{2} + \ell + o(1) - \frac{\ln(n)^2}{2} - \ell + o(1) - \ln(2) \left(\ln(n) + \gamma + o(1)\right) \\
&= \frac{1}{2} \left((\ln(2) + \ln(n))^2 - \ln(n)^2\right) - \ln(2)\ln(n) - \ln(2)\gamma + o(1) \\
&= \frac{1}{2} \ln(2)^2 - \ln(2)\gamma + o(1)
\end{aligned}$$

(c) La suite $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers $\frac{1}{2}\ln(2)^2 - \ln(2)\gamma$.
(c) Pour $n \geq 1$, on a $A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = A_{2n} + o(1)$. La suite $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc elle aussi vers la limite trouvée précédemment.
(d) La suite des termes d'ordre pair (A_{2n}) et celle des termes d'ordre impair (A_{2n+1}) convergent vers une même limite, ce qui prouve la convergence de (A_n) vers cette limite.