Lycée Condorcet
PCSI

14 septembre 2024

Devoir surveillé 1
Mathématiques

2 heures

1 Questions de cours

1. Donner la définition des coefficients binômiaux
2. Énoncer la formule du binôme.
3. La démontrer.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi^k, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad W_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

2 Exercices

Exercice 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produits suivants :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{1}{2^k}, \qquad R_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}, \qquad A_n = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \frac{i}{k+1}, \qquad B_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$$

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0;1\}$. Notons S_n la somme :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1}$$

1. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}, \qquad \frac{1}{k^2-1} = \frac{\alpha}{k+1} + \frac{\beta}{k-1}$$

2. Déduire une simplification de la somme S_n.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Dans cet exercice on s'intéresse aux sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$ avec $p = 2$ ou $p = 3$.

1. Dans cette question on donne une autre démonstration de l'égalité du cours portant sur la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. On suppose donc que le résultat n'est **PAS** connu. Par contre vous pouvez utiliser celui portant sur la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k,

$$(k+1)^3 - k^3 = 2k^2 + 3k + 1$$

(b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n}(3k^2+3k+1)=(n+1)^3$$

(c) En déduire une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

2. On s'intéresse maintenant à la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et on va donner deux démonstration différente du même résultat.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)=(n+1)^4$$

(b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(c) Redémontrer ce résultat par récurrence.