Lycée Condorcet
PCSI

14 septembre 2024

Devoir surveillé 1
Mathématiques
Corrigé

2 heures

1 Questions de cours

1. Donner la définition des coefficients binômiaux
2. Énoncer la formule du binôme.
3. La démontrer.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi^k, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad W_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

2 Exercices

Exercice 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produits suivants :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{1}{2^k}, \qquad R_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}, \qquad A_n = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \frac{i}{k+1}, \qquad B_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$$

On a, la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \quad \text{En effet } \forall k \in [\![1,n]\!],\ k = k+1-1. \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \end{aligned}$$

On reconnait alors une somme télescopique et on a :

$$\boxed{S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}}$$

La somme T_n est une somme géométrique on a ainsi :

$$T_n = \frac{1 - (1/2)^{n^2+1}}{1 - (1/2)}$$

D'où

$$\boxed{T_n = 2 - (1/2)^{n^2}}$$

D'après les propriétés de la somme on a :

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} n-k \quad \text{On pose } j = n-k \text{ et les variables étant muettes.} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\boxed{R_n = \frac{n-1}{2}}$$

D'après les propriétés du produit on a :

$$P_n = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k+3}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k-1} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k+3}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} 2k-1}$$

Dans le produit du dénominateur on procède au changement d'indice $j = k-2$ et les variables étant muettes on obtient :

$$P_n = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k+3}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-2} 2k+3}$$

Ainsi d'après la relation de Chasles :

$$P_n = \frac{(2n+1)(2n+3)}{3} \times \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-2} 2k+3}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-2} 2k+3}$$

On a ainsi

$$\boxed{P_n = \frac{(2n+1)(2n+3)}{3}}$$

La somme A_n est une somme triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} \frac{i}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} i \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\boxed{A_n = \frac{n(n+1)}{4}}$$

Notons que l'on a l'égalité d'ensemble :

$$[\![1,n]\!]^2 = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i<j\right\} \cup \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \geq j\right\}$$

Comme l'intersection des ensembles du membre de droite est vide on a, d'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} \min(i,j) + \sum_{1\leq j\leq i\leq n}^{n} \min(i,j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} j \\ &= \sum_{i=1}^{n} i(n-i) + \sum_{j=1}^{n} j(n-j+1) \end{aligned}$$

Les variables étant muettes on a

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{i=1}^{n} i(n-i) + \sum_{i=1}^{n} i(n-i+1)\\
&= \sum_{i=1}^{n} (2n+1)i - 2i^2\\
&= (2n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\boxed{B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Notons S_n la somme :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$$

1. **Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :**

$$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \frac{1}{k^2-1} = \frac{\alpha}{k+1} + \frac{\beta}{k-1}$$

2. **Déduire une simplification de la somme S_n.**

1. On note que le couple de réel $(-1/2, 1/2)$ convient.
2. Comme on a, pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{-1/2}{k+1} + \frac{1/2}{k-1}$$

on a ainsi :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) \quad \text{On reconnait une somme télescopique, on a ainsi :}\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{3n^2-n-2}{2}\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{(3n+2)(n-1)}{2n(n+1)}}$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Dans cet exercice on s'intéresse aux sommes $\sum_{k=0}^{n} k^p$ avec $p = 2$ ou $p = 3$.

1. **Dans cette question on donne une autre démonstration de l'égalité du cours portant sur la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$. On suppose donc que le résultat n'est PAS connu. Par contre vous pouvez utiliser celui portant sur la somme $\sum_{k=1}^{n} k$.**

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k,

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

(b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n}(3k^2+3k+1)=(n+1)^3$$

(c) En déduire une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$**.**

2. On s'intéresse maintenant à la somme $\sum_{k=1}^{n} k^3$ **et on va donner deux démonstration différente du même résultat.**

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$**,**

$$\sum_{k=0}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)=(n+1)^4$$

(b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(c) Redémontrer ce résultat par récurrence.

1. (a) Soit k un entier naturel, d'après la formule du binôme on a :

$$(k+1)^3-k^3=k^3+3k^2+3k+1-k^3$$

On a donc bien :

$$\boxed{(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1}$$

(b) D'après la question précédente on a :

$$\sum_{k=0}^{n} 3k^2+3k+1 \quad = \quad \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3$$

On reconnait alors une somme télescopique et on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} 3k^2+3k+1=(n+1)^3-0^3}$$

(c) D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}\left[(n+1)^3-\sum_{k=0}^{n}(3k+1)\right]\\ &= \frac{1}{3}\left[(n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-(n+1)\right]\\ &= \frac{n+1}{6}\left[2(n+1)^2-3n-2\right]\\ &= \frac{n+1}{6}\left[2n^2+4n+2-3n-2\right]\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, d'après la formule du binôme on a

$$(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1$$

On en déduit que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a

$$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$$

Ainsi on a

$$\sum_{k=0}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4$$

On reconnait alors une somme télescopique et on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)=(n+1)^4}$$

(b) D'après la question précédente on a la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}k^3 &= \frac{1}{4}\left[(n+1)^4-\sum_{k=0}^{n}6k^2+4k+1\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)\right]\\
&= \frac{n+1}{4}\left[(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\right]\\
&= \frac{n+1}{4}\left[(n+1)^3-(2n+1)(n+1)\right]\\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\left[(n+1)^2-(2n+1)\right]\\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2+2n+1-(2n+1)\right]
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

(c) Notons pour tout $n\in\mathbb{N}$ $A(n)$ l'égalité :

$$A(n):\qquad \sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Montrons par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0$ les deux termes de l'égalité $A(0)$ sont nuls ainsi $A(0)$ est vraie.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $A(n)$ vraie et déduisons en $A(n+1)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}k^3 &= \sum_{k+1}^{n}+(n+1)^3\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 \qquad \text{car } A(n) \text{ est supposée vraie.}\\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2+4n+4\right]\\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi si $A(n)$ est vraie alors $A(n+1)$ est vraie.
Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que $A(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.